Matematika Diskrit
bab 2-Himpunan

Oleh : Entin Martiana, S.Kom, M.Kom

Himpunan (1)

- Himpunan → kumpulan objek – objek yang berbeda.
- Objek didalam himpunan disebut elemen, unsur, atau anggota.
- Penyajian himpunan :

1. **Enumerasi** (menyebutkan semua anggota himpunan yang ada)

   contoh 1 : A = {1,2,3,4}; B = {2,4,6,8}

2. **Simbol – simbol baku** (ditulis dengan menggunakan huruf kapital yang dicetak tebal)

   contoh 2: **N** = himpunan bilangan asli = {1,2,...}

   P = himpunan bilangan bulat positif ={1,2,3,...}

   Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }

   Q = himpunan bilangan rasional

   R = himpunan bilangan riil

   C = himpunan bilangan kompleks

Himpunan(2)

3. Notasi pembentuk himpunan

Notasi: { *x* | syarat yang harus dipenuhi oleh *x* }

Aturan:

1. Bagian di kiri tanda '|' melambangkan elemen himpunan
2. Tanda '|' dibaca *dimana* atau *sedemikian hingga*
3. Bagian di kanan tanda'|' menunjukkan syarat keanggotaan himpunan
4. Setiap tanda ',' didalam syarat kenaggotaan dibaca sebagai *dan*

contoh 3: *A* adalah himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 5

A = { x | x adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5}

atau $A = \{ x \mid x \in P, x < 5 \}$ yang ekivalen dengan $A = \{1, 2, 3, 4\}$

contoh 4: M = { x | x adalah mahasiswa yang mengambil kuliah IF2151}

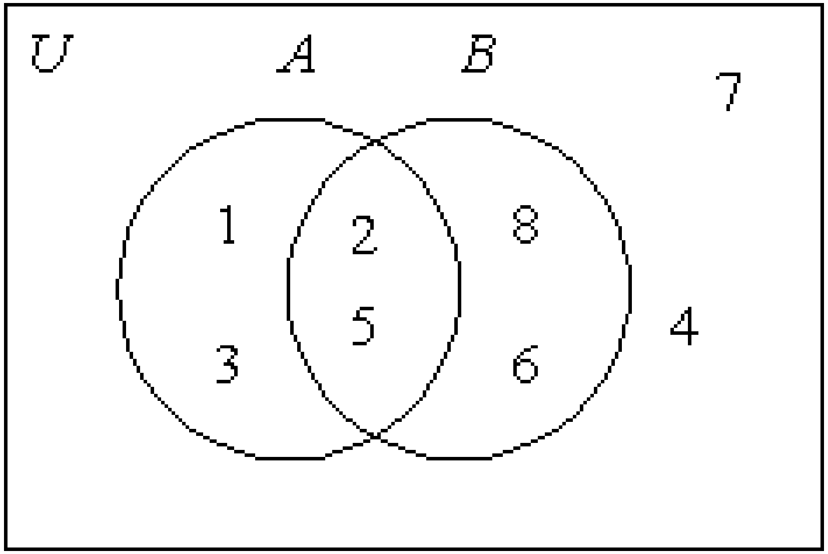
Himpunan(2)

4. Diagram Venn

Contoh 5:

Misalkan U = {1, 2, ..., 7, 8}, *A* = {1, 2, 3, 5} dan *B* = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn $A \cap B$:



Kardinalitas

- Jumlah elemen di dalam *A* disebut kardinal dari himpunan *A*.
- Misalkan A merupakan himpunan berhingga,maka jumlah elemen berbeda di dalam A disebut kardinal dari himpunan A.

- **notasi** : n(A) atau |A|

- Contoh 6:

  a. A = {x | x merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20}, A={2,3,5,7,11,13,17,19},maka |A| = 8

  b. B = {a, {a}, {{a}}, { }}, maka |B| = 4

  c. $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 21 },

  atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$

  d. T = {kucing, a, Amir, 10, paku}, maka $|T| = 5$

  e. $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $|A| = 3$

Himpunan Kosong

- Himpunan yang tidak memiliki satupun elemen atau himpunan dengan kardinal = 0.
- Notasi : ∅ atau { }
- Contoh 7:

(i) A = {x | x > x}, maka |A| = 0

(ii) B = {x | x adalah akar persamaan dari $x^2 + 5x + 10 = 0$}, maka |B| = 0

(iii) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

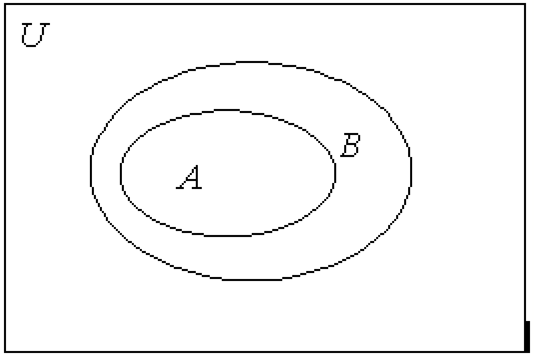
(iv) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$

(v) $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A) = 0$

- himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai {∅}
- himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai {∅, {∅}}
- {∅} bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

Himpunan Bagian (Subset)

- Himpunan A dikatakan himpunan bagian (subset) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B.
- B dikatakan superset dari A.
- Notasi : $A \subseteq B$
- Contoh 8:
    - a. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
    - b. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1,2,3\}$
    - c. $A = \{(x,y) \mid x+y < 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ dan $B = \{(x,y) \mid 2x+y < 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ maka $B \subseteq A$
    - d. Jika $A \subseteq B$ maka bentuk diagram venn-nya:



Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.
- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A.
- Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

- **Notasi** : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

- Contoh 9:

  (i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

  (ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

  (iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

- Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

  (a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

  (b) jika $A = B$, maka $B = A$

  (c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekivalen

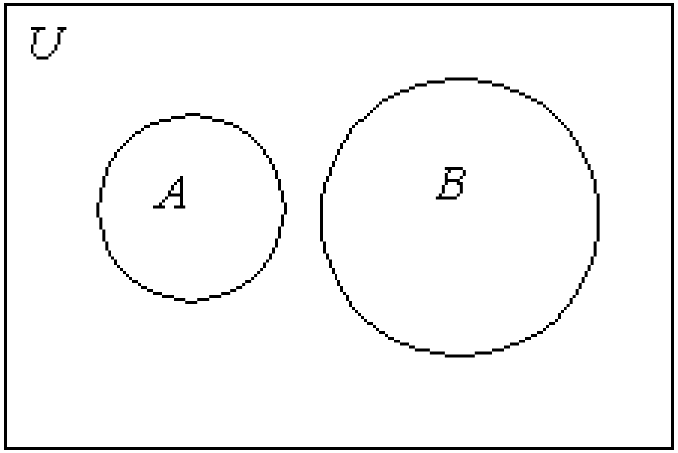
- Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

- **Contoh 10:** Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan dikatakan saling lepas, jika dan hanya jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.
- Notasi : A // B
- Diagram Venn:



- Contoh 11:

JIka A = {1,3,5,7} dan B = {a,b,c,d}, maka A//B

Himpunan Kuasa

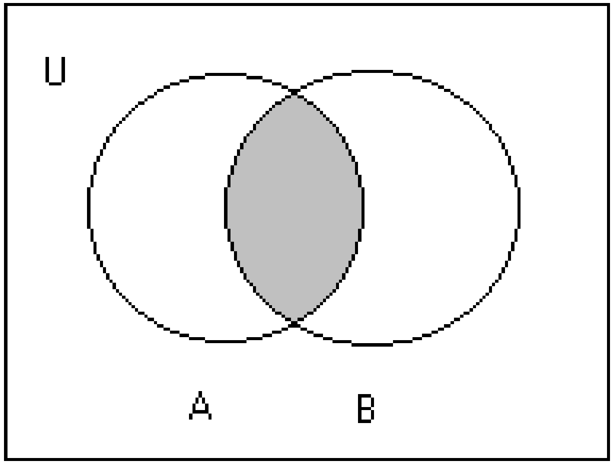
- Himpunan kuasa (power set) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.
- Notasi : P(A) atau 2^A
- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$
- **Contoh 12.**

  Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{\varnothing , \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$
- **Contoh 13.**

  Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\varnothing\}$ adalah $P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Operasi Himpunan (1)

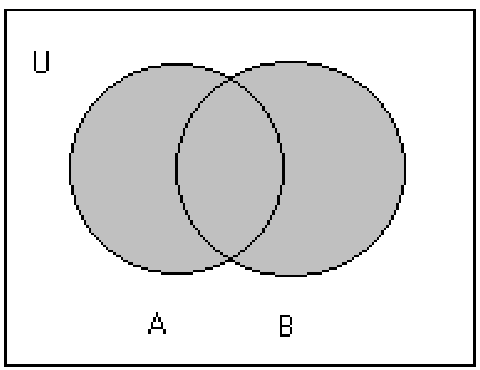
- Irisan *(intersection)*
  - Irisan dari himpunan A dan B adalah sebuah himpunan yang setiap elemennya dari himpunan A dan B.
  - Notasi : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$



Contoh :
Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$,
maka $A \cap B = \{4, 10\}$

Operasi Himpunan (2)

- Gabungan *(union)*
  - Gabungan dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A dan B.
  - Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



Contoh :
Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka A $B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

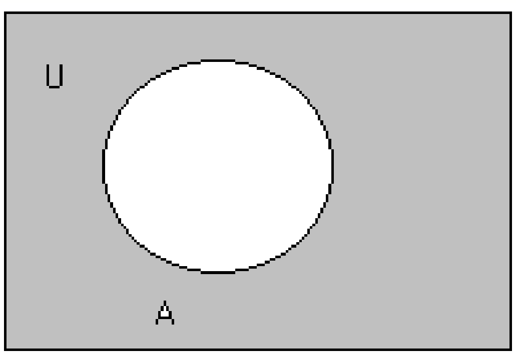
PRINSIP DUALITAS

- Prinsip dualitas: dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

1. Hukum identitas: $A \cup \varnothing = A$	Dualnya: $A \cap U = A$
2. Hukum *null*/dominasi: $A \cap \varnothing = \varnothing$	Dualnya: $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: $A \cup \overline{A} = U$	Dualnya: $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten: $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$
5. Hukum penyerapan: $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif: $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing} = U$	Dualnya: $\overline{U} = \varnothing$

Operasi Himpunan (3)

- Komplemen *(complement)*
  - Komplemen dari himpunan A adalah himpunan yang mengandung semua elemen dalam semesta pembicaraan yang tidak ada didalam A.
  - Notasi : $\bar{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$

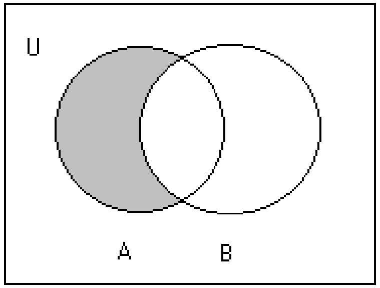


Contoh :
Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },
jika A = {1, 3, 7, 9}, maka = {2, 4, 6, 8}

Operasi Himpunan (4)

- Selisih (difference)
  - Selisih dari dua himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen dari A tetapi bukan elemen dari B. Selisih dari A dan B dapat juga dikatakan sebagai komplemen himpunan B relatif terhadap himpunan A.
  - Notasi :

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$$

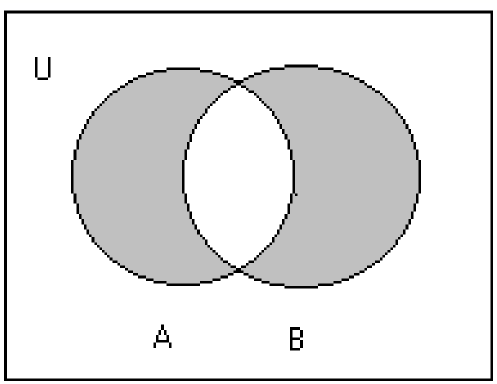


Contoh :

{1, 3, 5} – {1, 2, 3} = {5}, tetapi {1, 2, 3} – {1, 3, 5} = {2}

Operasi Himpunan (5)

- Beda Setangkup *(Symmetric Difference)*
  - Beda stangkup dari himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya ada pada himpunan A atau B, tetapi tidak pada keduanya.
  - Notasi : $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



Contoh :

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$,
maka A $B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Perkalian Kartesian dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya adalah semua pasangan berurutan (*ordered pairs)* yang dibentuk dari komponen pertama dari himpunan A dan komponen kedua dari himpunan B

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$
- Kardinalitas perkalian kartesian : $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

- **Contoh 20.**
- (i) Misalkan $C = \{1, 2, 3\}$, dan $D = \{a, b\}$, maka $C \times D = \{(1, a), (1, b), (2, \text{a}), (2, b), (3, a), (3, b)\}$
- (ii) Misalkan $A = B =$ himpunan semua bilangan riil, maka $A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
2. Pasangan berurutan (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$.
3. Perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

   Pada Contoh 20(i) di atas, $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \neq C \times D$.
4. Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

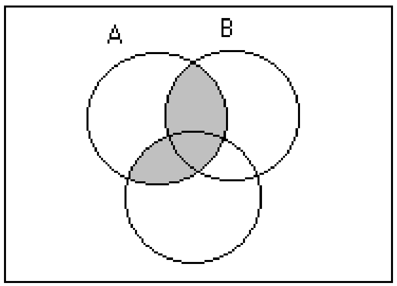
- A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }
- B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }
- Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?
- Jawab:
- $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu {(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)}.

Pembuktian pernyataan suatu himpunan

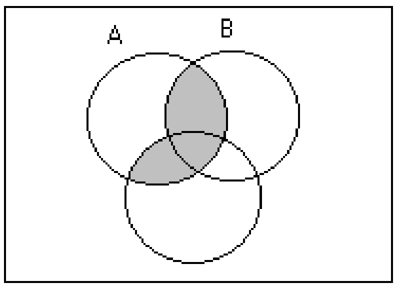
1. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

Contoh 26. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan diagram Venn.

Bukti:



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Kedua digaram Venn memberikan area arsiran yang sama.

Terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Diagram Venn hanya dapat digunakan jika himpunan yang digambarkan tidak banyak jumlahnya.

Metode ini *mengilustrasikan* ketimbang membuktikan fakta. Diagram Venn tidak dianggap sebagai metode yang valid untuk pembuktian secara formal.

Pembuktian pernyataan suatu himpunan

2. Pembuktikan dengan menggunakan tabel keanggotaan

Contoh 27. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bukti:

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Karena kolom $A \cap (B \cup C)$ dan kolom $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ sama, maka $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Pembuktian pernyataan suatu himpunan

3. Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan.

Contoh . Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap \;) = A$

Bukti:

$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B})$ (Hukum distributif)

$= A \cap U$ (Hukum komplemen)

$= A$ (Hukum identitas)

Contoh . Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

Bukti:

$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap \bar{A})$ (Definisi operasi selisih)

$= (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A})$ (Hukum distributif)

$= (A \cup B) \cap U$ (Hukum komplemen)

$= A \cup B$ (Hukum identitas)

Pembuktian pernyataan suatu himpunan

4. Pembuktian dengan menggunakan definisi

- Metode ini digunakan untuk membuktikan pernyataan himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, tetapi pernyataan yang berbentuk implikasi.
- Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian ($\subseteq$ atau $\subset$).

Contoh. Misalkan A dan B himpunan. Jika $A \cap B = \emptyset$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$. Buktikan!

Bukti:

I. Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika dan hanya jika setiap $x \in P$ juga $\in Q$. Misalkan $x \in A$. Karena $A \subseteq (B \cup C)$, maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup C)$.

II. Dari definisi operasi gabungan ($\cup$), $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$.

Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \emptyset$, maka $x \notin B$

Dari (I) dan (II), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall x \in A$ juga berlaku $x \in C$, maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$.

Prinsip Inklusi-Eksklusi

- Prinsip Inklusi-Eksklusi adalah suatu prinsip yang digunakan untuk mengetahui jumlah elemen hasil penggabungan dari beberapa himpunan.
- Jumlah elemen hasil penggabungan dihitung dari jumlah elemen di masing-masing himpunan dikurangi dengan jumlah elemen di dalam irisannya.
- Untuk dua himpunan A dan *B*:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Contoh:

U=100

A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,

B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,

$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15),

Hitunglah jumlah bilangan yang habis di bagi 3 atau 5?

yang ditanyakan adalah $|A \cup B|$.

$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33$,

$|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20$,

$|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Contoh:

Di antara bilangan bulat antara 101 dan 600 (termasuk 101 dan 600 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi oleh 4 dan 5 atau yang habis dibagi oleh keduanya?

Solusi:

Misalkan

U={Jumlah bilangan bulat antara 101 dan 600, termasuk 101 dan 600 }

A = { Anggota U yang habis dibagi 4 }

B = { Anggota U yang habis dibagi 5 }

Maka

$|U|$ = 600-101 = 500

$|A|$ = 500/4 = 125

$|B|$ = 500/5 = 100

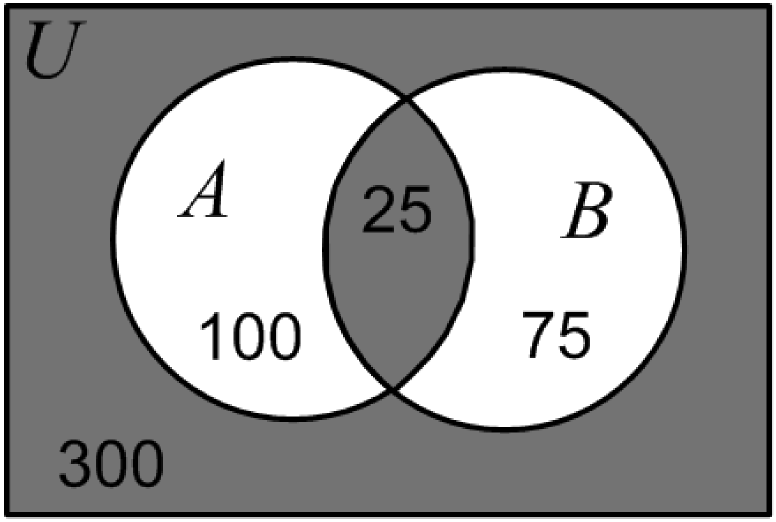
$|A \cap B|$ = 500/20 = 25

Ditanyakan: $\overline{|A \oplus B|}$?

Prinsip Inklusi-Eksklusi

$$
\begin{aligned}
|A \oplus B| &= |A| + |B| - 2\,|A \cap B| \\
&= 125 + 100 - 2 \cdot 25 \\
&= 175
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|A \oplus B| &= |U| - |A \oplus B| \\
&= 500 - 175 \\
&= \underline{325}
\end{aligned}
$$



Prinsip Inklusi-Eksklusi

Prinsip inklusi-ekslusi untuk 3 buah himpunan A,B,C :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Misalkan A_1, A_2, …, A_n himpunan hingga.

Maka

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_2| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

- Contoh:

Carilah banyaknya anggota dari $|A \cup B \cup C \cup D|$ jika setiap himpunan berukuran 50, setiap irisan dari dua himpunan berukuran 30, setiap irisan dari tiga himpunan berukuran 10, dan irisan dari keempat himpunan berukuran 2.

Solusi.

$$
\begin{aligned}
|A\cup B\cup C\cup D| = {} & |A| + |B| + |C| + |D| - |A\cap B| - \\
& |A\cap C| - |A\cap D| - |B\cap C| - |B\cap D| - \\
& |C\cap D| + |A\cap B\cap C| + |A\cap B\cap D| + \\
& |A\cap C\cap D| + |B\cap C\cap D| - \\
& |A \cap B \cap C \cap D| \\
= {} & 4 . 50 - 6 . 30 + 4 . 10 - 2 = 58
\end{aligned}
$$

TUGAS

1. Misalkan A adalah himpunan. Periksa apakan setiap himpunan dibawah ini benar atau salah. Jika salah, bagaimana seharusnya:

   a. $A \cap P(A) = A$

   b. $A \subseteq P(A)$

2. Dalam suatu survey pada 60 orang, didapat bahwa 25 orang membaca majalah Tempo, 26 orang membaca majalah Gatra dan 26 orang membaca majalah Intisari. Juga terdapat 9 orang yang membaca majalah Tempo dan Intisari, 11 orang membaca majalah Tempo dan Gatra, 8 orang membaca Gatra dan Intisari, serta 8 orang tidak membaca majalah satupun. Tentukan jumlah orang yang membaca ketiga majalah tersebut?. Tentukan juga jumlah orang yang benar- benar membaca satu majalah?.

3. Buktikan dengan menggunakan hukum-hukum himpunan. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

Tugas:

4. Sebanyak 115 mahasiswa mengambil mata kuliah Matematika Diskrit, 71 Kalkulus Peubah Banyak, dan 56 Geometri. Di antaranya, 25 mahasiswa mengambil Matematika Diskrit dan Kalkulus Peubah Banyak, 14 Matematika Diskrit dan Geometri, serta 9 orang mengambil Kalkulus Peubah Banyak dan Geometri. Jika terdapat 196 mahasiswa yang mengambil paling sedikit satu dari ketiga mata kuliah tersebut, berapa orang yang mengambil ketiga mata kuliah sekaligus?

5. Pada suatu angket yang diikuti 40 pelajar diketahui bahwa 32 orang lebih menyukai *Internet Explorer*, 18 orang lebih menyukai *Mozilla Firefox*, dan 2 orang tidak menyukai keduanya.

   Tentukanlah:

   a) Jumlah pelajar yang menyukai *Internet Explorer* atau *Mozilla Firefox*.

   b) Jumlah pelajar yang menyukai *Internet Explorer* atau *Mozilla Firefox*, tetapi tidak keduanya.

See you next week