MODUL AJAR

D3 Teknik Informatika

MATEMATIKA DISKRIT

Oleh:

Yuliana Setiowati
Entin Martiana

POLITEKNIK ELEKTRONIKA NEGERI SURABAYA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
2018

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, hakikat puji hanya milik Allah SWT, Al 'Alim (pemilik segala ilmu). Atas petunjukNya-lah kami dapat menyelesaikan Diktat Matematika Diskrit ini. Diharapkan dengan adanya diktat ini, mahasiswa mendapatkan panduan dalam menjalankan kuliah Matematika Diskrit pada Program Studi Teknologi Informasi.

Ucapan terima kasih tak lupa kami sampaikan kepada beberapa pihak yang telah memberikan kontribusi dalam penyelesaian buku ini, yaitu:

- Dr. Titon Dutono, Direktur PENS-ITS
- Iwan Syarif, MKom, Ketua Program Studi Teknologi Informasi PENS-ITS
- Dosen-dosen dan karyawan PENS-ITS

'Ilmu adalah ladang dari segala kemuliaan maka berbanggalah dengannya. Akan tetapi berhati-hatilah dalam menjaga kebanggaan tersebut.' begitu kata Imam Syafi'i dalam sebuah sya'irnya. Yang artinya menurut syair tersebut ilmu akan menjadi jalan bagi seseorang untuk menuju pada segala kemuliaan. Akan tetapi satu hal yang tidak kalah penting adalah menjaga agar ilmu tetap ada pada diri kita. Apa yang kami lakukan di sini adalah membantu mahasiswa untuk mendapatkan ilmu yang bermanfaat buat mereka. Satu pekerjaan besar yang harus mereka lakukan adalah bagaimana agar ilmu tersebut tetap ada pada diri mereka, yang itu tidak lain adalah dengan mengaplikasikan dan mengembangkannya.

Sekalipun buku ini telah selesai dengan proses yang cukup panjang, akan tetapi masih tidak menutup adanya kekurangan padanya. Segala masukan, kritik dan review sangat kami harapkan untuk semakin menyempurnakannya pada kesempatan mendatang.

Surabaya, 2018

PENYUSUN

DAFTAR ISI

Bab 1

Himpunan

POKOK BAHASAN:

- ✓ Himpunan

TUJUAN BELAJAR:

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

- ✓ Memahami terminologi dasar dari himpunan
- ✓ Memahami operasi-operasi yang berhubungan dengan himpunan
- ✓ Mampu menghubungkan contoh-contoh yang menerapkan himpunan

1.1 Definisi Himpunan

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering membicarakan objek-objek diskrit, misalnya buku, komputer, mahasiswa, nilai ujian, dan lain-lain. Dalam membicarakan objek diskrit, kita sering berhadapan dengan situasi yang berhubungan dengan sekelompok objek di dalam suatu kelompok atau kelas dan kita mengacu objek yang termasuk di dalam suatu kelompok. Terminologi dasar tentang sekumpulan objek diskrit adalah himpunan.

Konsep Himpunan adalah dasar untuk semua bidang matematika dan penerapannya. Sebuah himpunan adalah sembarang kumpulan objek yang berbeda. Objek yang merupakan anggota dari himpunan disebut dengan *member* atau *elemen*. Himpunan ditentukan oleh anggota-anggotanya dan bukan oleh urutan tertentu. Jika jumlah anggota dari himpunan terbatas dan tidak terlalu besar, maka kita dapat menyebutkan anggota dari himpunan tersebut misal A = {1,2,3,4}.

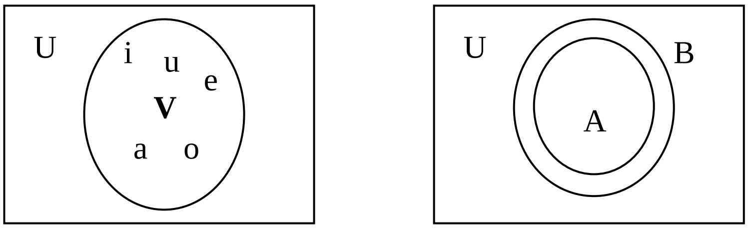
1.2 Penyajian Himpunan

Sebuah himpunan dapat dinyatakan dengan :

- Mendaftar semua elemen himpunan contoh A = {1,2,3,4} b = {a,b,c}
- Menggunakan notasi pembentuk himpunan (notasi set builder)

  Contoh : O = {x | x adalah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10}

  R ={x|x adalah bilangan real}.
- Secara grafik dengan menggunakan Diagram Venn yang dikenalkan oleh ahli matematika dari Inggris John Venn pada tahun 1881. Pada Diagram Venn Himpunan Semesta digambar dengan persegi panjang dan Himpunan digambar dengan lingkaran.



Gambar 1.1 (a) Himpunan huruf hidup (b) Diagram Venn yang menunjukkan bahwa A merupakan himpunan bagian dari B

Contoh Himpunan :

- o Himpunan V yang anggota-anggotanya merupakan huruf hidup dari alphabet V = {a,e,I,o,u}
- o Himpunan B adalah himpunan positif integer kurang dari 100 maka B = {1,2,3,4…,99}.
- o Himpunan alphabet ditulis dengan {a,b,c,d,e, ...,x,y,z}

Pada suatu himpunan, suatu objek dapat menjadi anggota atau bukan anggota himpunan tersebut. Untuk menyatakan keanggotaan digunakan notasi berikut :

$x \in A$ untuk menyatakan x merupakan anggota himpunan A

$x \notin A$ untuk menyatakan x bukan merupakan anggota himpunan A

Contoh :

Misalkan A = {1,2,3} R = {a,b,{a,b,c},{a,c}} maka

$2 \in A$, $5 \notin B$, $\{a,b,c\} \in R$, $\{a\} \notin R$

1.3 Simbol – Simbol Baku

Dibawah ini adalah simbol baku yang biasa digunakan untuk mendefinisikan himpunan:

P = himpunan bilangan bulat positif = {1, 2, 3, . . .}

N = himpunan bilangan natural = {1,2, . . .}

Z = himpunan bilangan bulat = {...,-2,-1,0,1,2,...}

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

1.4 Dua Himpunan yang Sama

Definisi :

Dua Himpunan adalah sama jika dan hanya jika kedua himpunan memiliki elemen yang sama. Notasi $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh :

A = {1,3,5} B = {3,5,1} C = {1,3,3,3,1,5}

A = B karena $1 \in A$ dan $1 \in B$, $2 \in A$ dan $2 \in B$, $3 \in A$ dan $3 \in B$

A = C karena $1 \in A$ dan $1 \in C$, $2 \in A$ dan $2 \in C$, $3 \in A$ dan $3 \in C$

Berarti A = C

1.5 Himpunan Kosong dan Kardinalitas

Himpunan Kosong dilambangkan dengan { } atau Ø adalah himpunan yang tidak memiliki anggota. Jumlah elemen dari Himpunan A disebut Kardinalitas, simbol | A |. Himpunan yang berhingga dapat ditentukan kardinalitasnya dan himpunan yang tak berhingga kardinalitas tidak dapat dihitung. Contoh kardinalitas yang dapat dihitung

- Jika A = {1, 2, 3} maka |A| = 3
- Jika B = {x | x is a natural number and $1 \leq x \leq 9$} maka |B| = 9

Contoh kardinalitas yang tidak dapat dihitung :

- R ={x|x adalah bilangan real}
- S={x| x is a real number and $1 \leq x \leq 4$} = [1,4]

1.6 Himpunan Bagian

Definisi :

- Himpunan A dikatakan merupakan himpunan bagian B jika dan hanya jika setiap elemen A juga merupakan elemen dari B. Dinotasikan dengan $A \subseteq B$ untuk menyatakan A himpunan bagian dari B.
- X adalah *proper subset* dari Y jika $X \subseteq Y$ tapi tidak $Y \not\subset X$
- Universal Set U (Himpunan Semesta) adalah semua objek yang sedang kita bicarakan.
- Terdapat himpunan S , Power set S adalah himpunan dari semua himpunan bagian dari himpunan S. Dinyatakan dengan P(S).

Apakah Power Set dari Himpunan A {1,2,3}?

P(A) = { {}, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3} {1,2,3} } maka | P(A) | = 8

Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari semua himpunan.

Teorema

Jika |X| = n maka $|P(X)| = 2^n$.

1.7 Operasi pada Himpunan

Definisi

- Terdapat Himpunan A dan B, Gabungan (Union) dari himpunan A dan B dinyatakan dengan $A \cup B$ adalah himpunan yang elemennya merupakan anggota himpunan A atau merupakan anggota himpunan B.

$A \cup B = \{x \mid X \in A \text{ atau } x \in B\}$

- Terdapat Himpunan A dan B, Irisan (Intersection) dari himpunan A dan B dinyatakan dengan $A \cap B$ adalah himpunan yang elemennya merupakan anggota himpunan A dan anggota himpunan B.

  $A \cup B = \{x \mid X \in A \text{ dan } x \in B\}$

- Dua himpunan disebut disjoint (saling lepas) jika irisannya adalah Himpunan Kosong.
- Selisih (difference) dari Himpunan A dan B dinyatakan dengan A-B, Himpunan yang elemenya adalah elemen dari A yang bukan elemen dari B.

  $A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$

- U adalah Himpunan Semesta. Komplemen dari Himpunan A dinyatakan dengan A^c. $A^c = U - A$

Tabel 1.1 merupakan hukum-hukum aljabar Himpunan

No	Sifat	Notasi
1.	Hukum Assosiatif	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2.	Hukum Komutatif	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
3.	Hukum Distributif	$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$
4.	Hukum Identitas	$A\cap U=A$ $A\varnothing\cup = A$
5.	Hukum Komplemen	$A\cup Ac = U$ $A\cap Ac = \varnothing$
6.	Hukum Idempoten	$A\cup A = A$ $A\cap A = A$
7.	Hukum Ikatan (Bound Laws)	$A\cup U = U$ $A\varnothing\cap = \varnothing$
8.	Hukum penyerapan (Absorption Laws)	$A\cup(A\cap B) = A$ $A\cap(A\cup B) = A$
9.	Hukum Involusi (Involution Laws)	$(Ac)c = A$
10.	Hukum 0/1	$\varnothing c = U$ $Uc = \varnothing$
11.	Hukum De Morgan	$(A\cup B)c = Ac\cap Bc$

No	Sifat	Notasi
		$(A \cap B)c = Ac \cup Bc$

1.8 Prinsip Inklusi – Ekslusi

Penggabungan 2 himpunan menghasilkan himpunan baru yang elemennya berasal dari himpunan A dan B. Himpunan A dan himpunan B mungkin saja memiliki elemen-elemen yang sama.

$| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B |$

Prinsip ini dikenal dengan nama prinsip inklusi – ekslusi.

Untuk tiga himpunan A, B dan C berlaku

$| A \cup B \cup C | = | A | + | B | + | C | - | A \cap B | - | A \cap C | - | B \cap C | + | A \cap B \cap C |$

Contoh :

Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5 ?

Penyelesaian :

Misalkan A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3

B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5

$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis di bagi KPK dari 3 dan 5 yaitu 15)

Dihitung $| A | = \lfloor 100/3 \rfloor = 33$

$| B | = \lfloor 100/5 \rfloor = 20$

$| A \cap B | = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$

didapat $| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B | = 33 + 20 – 6 = 47$

1.9 Ringkasan

- Sebuah himpunan adalah sembarang kumpulan objek yang berbeda
- Penyajian himpunan dapat menggunakan :

  Mendaftar semua elemen himpunan contoh A = {1,2,3,4} b = {a,b,c}

  Menggunakan notasi pembentuk himpunan (notasi set builder)

  Contoh : O = {x | x adalah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10}

R ={x|x adalah bilangan real}.

Secara grafik dengan menggunakan Diagram Venn

- Untuk menggabungkan dua himpunan atau lebih dapat menggunakan operasi pada himpunan.
- Pada himpunan dapat diterapkan prinsip Inklusi – Eksklusi.

1.10 Latihan Soal

1. Sebutkan anggota dari himpunan-himpunan di bawah ini:
   a. A = {x | x adalah bilangan real yang memenuhi $x^2 = 1$}
   b. B = { x | x adalah bilangan integer kurang dari 12 }
2. Buat notasi pembangkit himpunan untuk mendeskripsikan himpunan di bawah ini:
   a. {0, 3, 6, 9, 12}
   b. {M, N, O, P}
3. Cari himpunan A dan B jika A – B = {1,5,7,8} B – A = {2,10} dan $A \cap B$ = {3,6,9}
4. Misalkan A = {0,2,4,6,8,10} B = {0,1,2,3,4,5,6} C = {4,5,6,7,8,9,10}
   Dapatkan (a) $A \cap B \cap C$ (b) $A \cup B \cup C$ (c) $(A \cup B) \cap C$ (d) $(A \cap B) \cup C$ dan gambar Diagram Venn-nya !
5. Tentukan apakah statement di bawah ini benar atau salah !
   a. $x \in \{x\}$ b. $\{x\} \subseteq \{x\}$ c. $\emptyset \subseteq \{x\}$
6. Misal A dan B adalah subset dari himpunan semesta U. Tunjukkan bahwa $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $\sim B \subseteq \sim A$.

Bab 2

Relasi dan Fungsi

POKOK BAHASAN:

- ✓ Relasi
- ✓ Fungsi

TUJUAN BELAJAR:

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

- ✓ Memahami definisi relasi dan fungsi
- ✓ Memahami operasi-operasi yang berhubungan dengan fungsi dan relasi
- ✓ Mampu menghubungkan contoh-contoh fungsi dan model relasi dan operasi-operasi yang berhubungan dengannya

2.1 Relasi

Hubungan (relationship) antara elemen himpunan dengan elemen himpunan lainnya sering dijumpai pada banyak masalah. Misalnya hubungan antara mahasiswa dengan mata kuliah yang diambil, hubungan antara orang dengan kerabatnya, dan lain-lain. Hubungan antara elemen himpunan dengan elemen himpunan lain dinyatakan dengan struktur yang disebut relasi.

2.1.1 Definisi Relasi

Terdapat himpunan A dan B. Cartesian Product dari Himpunan A dan B dinyatakan dengan $A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh Cartesian Product :

A = {1,2,3} B = {a,b,c}. Cartesian Product dari A X B = { (1,a), (1,b), (1,c), (2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c) }. Cartesian Product dari B X A = {(a,1), (b,1), (c,1), (a,2), (b,2), (c,2), (a,3), (b,3), (c,3)}. Cartesian Product A X B = B X A tidak sama. Cara yang paling mudah untuk menyatakan keterhubungan antara elemen-elemen pada dua himpunan adalah menggunakan pasangan berurutan dari dua elemen yang berelasi. Karena merupakan relasi antara dua himpunan, maka disebut relasi biner.

Definisi.

Terdapat himpunan A dan B. Relasi Biner dari A ke B adalah himpunan bagian dari Cartesian Product A X B. Relasi dari Himpunan A adalah relasi dari A ke A.

Contoh :

Terdapat himpunan A = {1,2,3,4}

Relasi R = {(a,b) | a habis membagi b }

R = { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4) ,(2,2), (2,4), (3,3), (4,4) }

Contoh :

Misalkan A = {1, 2, 3, 4}.

Himpunan terurut manakah yang terdapat dalam relasi

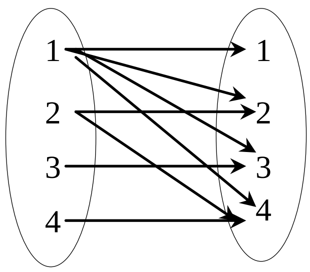
R = {(a, b) | a < b} ?

R = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)}

Domain (daerah asal) dan Range (daerah hasil)

Terdapat sebuah relasi *R* dari X ke Y *domain R* adalah himpunan Dom(*R*) = { x∈X | (x, y) ∈*R* untuk beberapa y∈Y}. Daerah hasil / Range *R* adalah himpunan

Rng(*R*) = { y∈Y | (x, y) ∈*R* untuk beberapa x ∈X}



R	1	2	3	4
1	x	x	x	x
2		x		x
3			x	
4				x

Gambar 2.1 Gambar dan tabel Relasi pada contoh

Contoh :

- Jika X = {1, 2, 3} and Y = {a, b}
  R = {(1,a), (1,b), (2,b)} maka Dom(*R*)= {1, 2}, Rng(*R*) = (a, b}
- Jika X = {1, 3, 4, 7, 9, 12, 16} dan Y = {1, 2, 4, 8, 9}
  Relasi R1 didefinisikan dengan *R*1 = {(x, y) | x $\in$ X, y $\in$ Y, dan x = y^2} maka elemen dari R1 adalah R1 = {(1,1), (4,2), (16,4)}
  Relasi R2 didefinisikan dengan *R*2 = {(x, y) | x $\in$ X, y $\in$ Y, dan x^2 = y}maka *R*2 = {(1,1), (3.9)}. Karena (1,b) $\in$ R maka kita dapat menuliskan dalam bentuk 1 R b

Contoh :

Ada berapa relasi berbeda yang dapat didefinisikan pada himpunan A dengan n anggota?

Suatu relasi pada A adalah subhimpunan dari A×A.

Ada berapa anggota A×A ? Terdapat n^2 anggota A×A

Ada berapa subhimpunan dari A×A? Banyaknya subhimpunan yang dapat dibentuk dari suatu himpunan dengan m anggota adalah 2^m.

Jadi, ada 2^{n^2} subhimpunan dapat dibentuk dari A×A.

Sehingga, dapat didefinisikan 2^{n^2} relasi berbeda pada A.

2.1.2 Sifat-Sifat Relasi

Definisi

- Relasi R pada himpunan A adalah refleksif jika (a,a) $\in$ R untuk setiap elemen a $\in$ A.
- Relasi R pada himpunan A disebut symmetric jika (a,b) $\in$ R maka (b,a) $\in$ R.
- Relasi *R* pada himpunan A adalah *antisymmetric* sedemikian sehingga (a,b) $\in$*R* maka (b,a) $\in$ *R* hanya jika a = b untuk a,b $\in$ A atau Relasi R bukan antisymmetric jika ada a,b $\in$R sedemikian sehingga (a,b) dan (b,a) $\in$R tapi a$\neq$b

- ♦ Relasi R pada himpunan A dikatakan transitive jika (a,b) ∈ R dan (b,c) ∈ R maka (a,c) ∈ R

Definisi tersebut menyatakan bahwa relasi R pada himpunan A bukan antisimetris jika ada elemen berbeda a dan b sedemikian sehingga (a,b) ∈*R* maka (b,a) ∈ *R*. Istilah simetris dan antisimetris tidaklah berlawanan, karena suatu relasi dapat memiliki kedua sifat itu sekaligus. Namun relasi tidak dapat memiliki kedua sifat tersebut sekaligus jika ia mengandung beberapa pasangan terurut berbentuk (a,b) yang mana a≠b

Contoh

Misalkan R adalah Relasi pada X = {1,2,3,4} yang didefinisikan R = {(x,y) | x<=y x,y ∈ X. Maka R={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}

- Relasi X adalah refleksif karena setiap x ∈X terdapat (x,x) (1,1) (2,2) (3,3) (4,4)
- Tidak Simetris (*antisymmetric)* (2,3) ∈ R tetapi (3,2) ∈ R
- Transitif. Dibawah ini adalah transitif dari R. (2,3) ∈ R dan (3,4) ∈ R (2,4) maka (2,4) ∈ R

Pasangan Berbentuk			Pasangan Berbentuk		
(x,y)	(y,z)	(x,z)	(x,y)	(y,z)	(x,z)
(1,1)	(1,1)	(1,1)	(2,2)	(2,2)	(2,2)
(1,1)	(1,2)	(1,2)	(2,2)	(2,3)	(2,3)
(1,1)	(1,3)	(1,3)	(2,2)	(2,4)	(2,4)
(1,1)	(1,4)	(1,4)	(2,3)	(3,3)	(2,3)
(1,2)	(2,2)	(1,2)	(2,3)	(3,4)	(2,4)
(1,2)	(2,3)	(1,3)	(2,4)	(4,4)	(2,4)
(1,2)	(2,4)	(1,4)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
(1,3)	(3,3)	(1,3)	(3,3)	(3,4)	(3,4)
(1,3)	(3,4)	(1,4)	(3,4)	(4,4)	(3,4)
(1,4)	(4,4)	(1,4)	(4,4)	(4,4)	(3,4)

Contoh :

Dibawah ini adalah Relasi pada himpunan integer

R1 = {(a,b) | a ≤ b }

R2 = {(a,b) | a > b}

R3 = {(a,b) | a = b atau a = -b}

R4 = {(a,b) | a=b }

R5 = {(a,b) | a = b+1 }

R6 = {(a,b) | a + b = 3 }

Penyelesaian :

Relasi R1(karena a ≤ b untuk setiap integer a), R3 (karena a=b) dan R4 (karena a=b) merupakan Refleksif.

Relasi R3, R4 dan R6 adalah simetris. R3 adalah simetris untuk kondisi : jika a = b atau a = -b maka b = a atau b = -a. R4 adalah simetris karena a = b berarti b = a. R6 adalah simetris karena a + b ≤ 3 berimplikasi pada b + a ≤ 3.

Relasi R1, R2 R4 dan R5 adalah antisimetris. R1 adalah antisimetris karena a ≤ b dan b ≤ a berimplikasi pada a = b. R2 adalah antisimetrik karena tidak mungkin a>b dan b>a. R5 antisimetrik karena tidak mungkin a = b + 1 dan b = a +1.

Relasi R1,R2, R3 dan R4 merupakan transitif. R1 adalah transitif karena a ≤ b dan b ≤ c berimplikasi pada a ≤ c. R2 adalah transitif karena a > b dan b > c berimplikasi pada a > c. R3 adalah transitif karena a = b dan b = c berimplikasi pada a = c, a = -b dan b = -c berimplikasi pada a = -c.

Contoh :

Dibawah ini adalah Relasi pada himpunan X = {1,2,3,4}

R1 = { (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4) }

R2 = {(1,1), (1,2), (2,1)}

R3 = {(1,1), (1,2), (1,4), (2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)}

R4 = {(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)}

R5 = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)}

R6 = {(3,4)}

Penyelesaian :

Pada R3 dan R5 adalah Refleksif karena pada Relasi terdapat (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) untuk setiap x ϵ X. Relasi lainnya tidak refleksif.

Pada R2 dan R3 adalah simetris karena setiap (a,b) pada Relasi memiliki (b,a) pada Relasi. Sedangkan pada R4, R5,R6 adalah antisimetris.

R4, R5 dan R6 transitif. R1 bukan transitif karena (3,4) dan (4,1) $\in$ R1 tetapi (3,1) $\notin$ R1. R2 bukan transitif karena (2,1) dan (1,2) $\in$ R2 tetapi (2,2) $\notin$ R2. R3 juga bukan transitif karena (4,1) dan (1,2) $\in$ R3 tetapi (4,2) $\notin$ R3.

2.1.3 Relasi Total Orders dan Partial Order

Definisi

Relasi R pada himpunan X disebut urutan parsial (partial orders) jika R refleksif, antisimetris, dan transitif. Istilah partial order adalah secara umum beberapa anggota di X tidak terbandingkan. Jika setiap pasang anggota di X terbandingkan disebut urutan total (total orders).

Contoh :

Apakah (x, y) $\in R$ merupakan partial order jika x >= y?

Ya karena :

- Reflexive: (x, x) $\in$ R
- Anti-symmetric: jika (x, y) $\in$ R dan x $\neq$ y, maka (y, x) $\notin$R
- Transitive: jika (x, y) $\in$ R dan (y, z) $\in$ R, maka (x, z) $\in$ R

Relasi x $\geq$ y adalah urutan total karena jika x dan y bilangan bulat maka x $\leq$ y atau y $\leq$ x. Relasi membagi pada bilangan bulat positif mempunyai anggota terbandingkan dan tak terbandingkan. Contoh 2 dan 3 terbandingkan (karena 2 tidak membagi dan 3 tidak membagi 2 tetapi 3 dan 6 terbandingkan (karena 3 membagi 6).

2.1.4 Kombinasi Relasi

Karena Relasi dari A ke B merupakan himpunan bagian A X B, dua relasi A ke B dapat dikombinasikan dengan operasi himpunan.

Contoh :

A = {1,2,3} B = {1,2,3,4} Relasi R1 = {(1,1), (2,2), (3,3)} dan R2 = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)} dapat dikombinasikan sebagai berikut :

R1 $\cup$R2 = {(1,1), (1,2), (1,3) (2,2), (3,3)}

R1 $\cap$ R2 = {(1,1)}

R1 – R2 = {(2,2) , (3,3)}

R2 – R1 = {(1,2), (1,3), (1,4)}

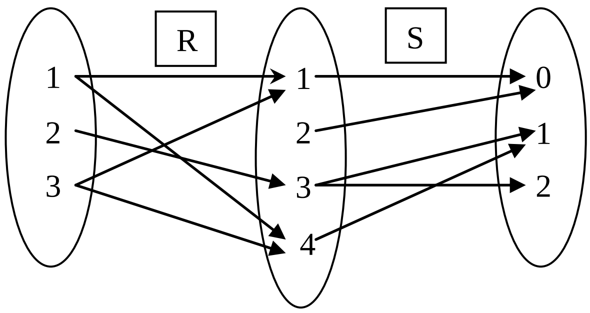
Definisi :

Misalkan R merupakan Relasi dari Himpunan A ke P. S merupakan Relasi dari B ke C. Komposisi dari R dan S adalah relasi yang terdiri dari pasangan berurutan (a,c) dimana a $\in$ A, c $\in$ C, dan ada elemen b $\in$ B sedemikian sehingga (a,b) $\in$ R dan (b,c) $\in$ S. Dinyatakan dengan S o R.

Contoh :

R adalah Relasi dari {1,2,3} ke {1,2,3,4} dengan R = {(1,1), (1,4), (2,3), (3,1), (3,4)}. S adalah Relasi dari {1,2,3,4} ke {0,1,2} dengan S ={(1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (4,1)}

S o R dapat dihasilkan dari (2,3) pada R dan (3,1) pada S akan menghasilkan (2,1) pada S o R. S o R = {(1,0), (1,1) (2,1) (2,2) (3,0) (3,1)}



Gambar 2.2 Komposisi S o R

Contoh :

Misalkan D dan S relasi pada A = {1, 2, 3, 4}.

D = {(a, b) | b = 5 - a} “b sama dengan (5 – a)”

S = {(a, b) | a < b} “a lebih kecil dari b”

D = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}

S = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}

S°D = {(2,4), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)}

Bagaimana dengan D°S ? apakah menghasilkan himpunan yang sama dengan S°D ? D memetakan suatu anggota a ke anggota (5 – a), dan setelah itu S memetakan (5 – a) pada semua anggota yang lebih besar dari (5 – a), yang menghasilkan

S°D = {(a,b) | b > 5 – a} atau S°D = {(a,b) | a + b > 5}.

Definisi

- ♦ Misalkan R adalah Relasi pada himpunan A. Power R^n n = 1,2,3 didefinisikan : $R^n = R$ dan $R^{n+1} = R^n \circ R$

  Dari definisi menunjukkan bahwa $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R^2 \circ R = (R \circ R) \circ R$
- ♦ Relasi R pada himpunan A transitif jika dan hanya jika $R^n \subseteq R$ untuk n = 1,2,3,4…

Contoh :

Misalkan R = {(1,1), (2,1) (3,2) (4,3). Cari R^n n = 1,2,3,4, ...

$R^2 = R \circ R$ maka diperoleh R^2 = {(1,1), (2,1), (3,1), (4,2)}, $R^3 = R^2 \circ R$ maka $R^{3 =}$ {(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)}, $R^{4 =}$ {(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)}. $R^{n =}$ R^3 untuk n = 5, 6, 7, . . .

2.1.5 Representasi Relasi

Ada beberapa cara untuk menyatakan sebuah relasi pada himpunan berhingga.

- Dengan mendaftar pasangan berurutan dari relasi tersebut
- Dengan matrik 0-1
- Dengan directed graph.

Representasi relasi menggunakan matrik.

Sebuah Relasi dapat direpresentasikan dengan matrik 0-1. Misalkan terdapat relasi dari A = {a_1, a_2 ,a_3, . . . a_m} ke B = {b_1, b_2 ,b_3, . . . b_n}. Relasi R dapat dinyatakan dengan matrix $M_R = [m_{ij}]$ dimana

m_{ij} = 1 jika $(a_i, b_j) \in R$

0 jika $(a_i, b_j) \in R$

Contoh :

A = {1,2,3} B ={1,2}

R = {(x,y) | x > y, x ϵ A, y ϵ B }

R = {(2,1) (3,1) (3,2)}

Matrik untuk R adalah

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1 pada M_R menunjukkan pasangan (2,1) (3,1) (3,2) berada pada relasi R. 0 menunjukkan pasangan tidak terdapat pada Relasi R

A = {a_1, a_2, a_3 } dan B = { b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 }. Pasangan berurutan dari R dinyatakan dengan matrik seperti berikut :

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R = { (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)}

Matrik Relasi pada sebuah himpunan adalah matrik bujur sangkar maka dapat kita tentukan apakah relasi tersebut refleksif, simetrik, antisimetrik dan transitif.

- R adalah refleksif jika semua elemen pada diagonal utama pada M_R sama dengan 1.
- R adalah simetrik jika (a_i, a_j) ∈ R dan (a_j, a_i) ∈ R. Pada M_R R adalah simetrik jika dan hanya jika $m_{ij} = 1$ dan $m_{ji} = 1$. Ini berlaku juga pada $m_{ij} = 0$ dan $m_{ji} = 0$. R adalah simetrik jika dan hanya jika $m_{ij} = m_{ji}$ untuk semua pasangan integer i dan j dengan i = 1,2,3,…,n dan j = 1,2,3,…,n. R adalah simetrik jika dan hanya $M_R = (M_R)^t$.
- Relasi merupakan antisimetrik jika dan hanya jika $m_{ij} = 1$ dan $m_{ji} = 0$ dengan $i \neq j$.
- Relasi merupakan transitif jika pada c_{ij} pada $C = A^2$ adalah bukan nol maka entri a_{ij} pada A juga bukan nol.

1				
	1			
		1		
			1	
				1

	1	1		
1		0	1	
1	0			0
	1			
		0		

Gambar 2.3 (a) Matrik untuk relasi refleksif (b) Matrik untuk relasi simetrik.

Contoh :

Misalkan relasi R dan S direpresentasikan oleh matriks

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks yang merepresentasikan $R \cup S$ and $R \cap S$?

Penyelesaian :

Matriks-matriks tersebut adalah

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh :

Misalkan R adalah Relasi pada X = {1,2,3,4} yang didefinisikan R = {(x,y) | x<=y x,y $\in$ X. Maka R={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)} merupakan transitif.

R =

1	1	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1
0	0	0	1

A =R*R =

1	2	3	4
0	1	2	3
0	0	1	2
0	0	0	1

A adalah matrik hasil perkalian R * R, dapat dilihat setiap elemen a_{ij} pada matrik A yang tidak nol maka di matrik C pada c_{ij} juga tidak nol.

Contoh :

Cari matriks yang merepresentasikan R2, dengan matriks yang merepresentasikan R sebagai berikut :

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Matriks untuk R2 diberikan oleh

$$M_{R^2} = M_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Representasi relasi dengan Directed Graph (Graph Berarah)

Definisi.

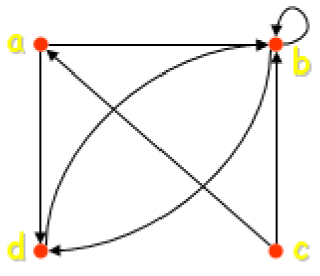
- ***Graf berarah*** atau directed graph atau digraf memuat himpunan titik (***verteks***) V dan himpunan E yang terdiri dari pasangan terurut dari anggota-anggota V yang disebut sisi (***arc***).
- verteks a disebut verteks awal dari sisi (a,b) dan verteks b disebut verteks akhir.

Kita dapat menggunakan panah untuk mengilustrasikan digraf.

Contoh :

Ilustrasikan digraf dengan V = {a, b, c, d},

E = {(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (d, b)}.



Sisi dalam bentuk (b, b) disebut ***loop.***

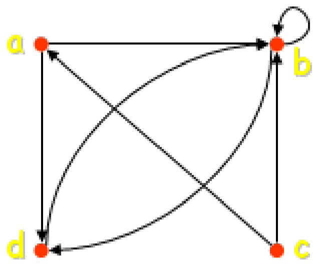
Setiap relasi R pada himpunan A dapat direpresentasikan dengan menggunakan digraf dengan verteks: anggota A dan sisi: pasangan (a,b)∈R. Sebaliknya, setiap digraf dengan himpunan verteks V dan sisi E dapat direpresentasikan oleh relasi pada

V yang memuat setiap pasangan di E. Korespondesi satu-satu antara relasi dan digraf ini mengakibatkan setiap pernyataan yang berlaku untuk relasi juga berlaku untuk digraf, dan sebaliknya.

Digraf yang merepresentasikan relasi refleksif pada setiap verteksnya terdapat loop. Digraf yang merepresentasikan relasi simetris, setiap sisinya memiliki dua arah. Digraf yang merepresentasikan relasi antisimetris, tidak ada sisi yang memiliki dua arah. Digraf yang merepresentasikan relasi transitif, jika terdapat sisi(a,b) dan (b,c) maka terdapat sisi.(a,c)

Contoh :

Tentukan apakah relasi untuk digraf berikut refleksif, simetris, antisimetris, atau transitif



R = {(a,b), (a,d), (b,b), (b,d), (c,b), (c,a), (d,b)}

Sifat dari digraph tersebut adalah :

- Bukan refleksif karena tidak memiliki loop disetiap verteksnya.
- Bukan simetris karena (a,b) $\in$ R, tetapi (b,a) $\notin$ R.
- antisimetris
- Bukan transitif karena (c,b) dan (b,d) $\in$ R tetapi (c,d) $\notin$ R

2.1 Fungsi

Fungsi merupakan jenis khusus pada relasi. Jika f adalah relasi dari X ke Y agar f juga merupakan fungsi domain dari f harus sama dengan X dan jika (x,y) dan (x,y’) berada di f, kita harus mempunyai y = y’

2.2.1 Definisi Fungsi

Fungsi f dari X ke Y adalah relasi dari X ke Y yang mempunyai sifat :

Domain dari f adalah X

Jika (x,y) dan (x,y') berada di f, maka y = y'

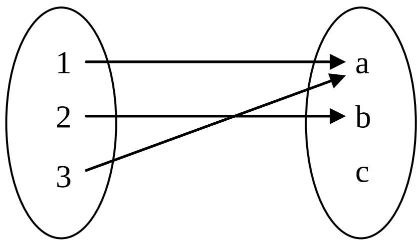
Fungsi dari X ke Y dinotasikan dengan f : X → Y

Misalkan terdapat himpunan A dan B, kita sebut A sebagai domain f dan B sebagai kodomain f.

Contoh :

- ♦ Relasi f = {(1,a),(2,b),(3,a)}

  Dari X = {1,2,3} ke Y = {a,b,c} adalah fungsi dari X ke Y. Domain dari f adalah X dan daerah hasil dari f = {a,b}



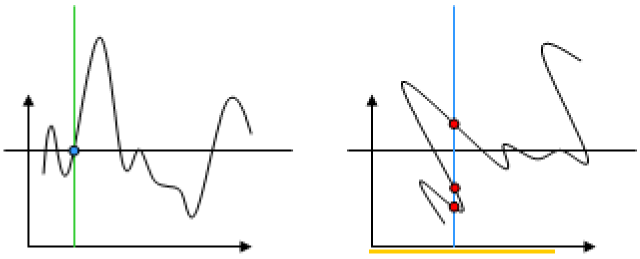
Gambar 2.4 Relasi f adalah Fungsi

- ♦ Relasi R = {(1,a), (2,a), (3,b)}

  Dari X = {1,2,3,4} ke Y = {a,b,c} bukan fungsi dari X ke Y. Sifat I tidak dipenuhi karena daerah domain R = {1,2,3} maka R ≠ X.

- ♦ F adalah fungsi dari Z ke Z dimana Z merupakan himpunan bilangan integer. Fungsi f dinyatakan dengan f(x) = x2. Jika domainnya merupakan himpunan bilangan integer, relasi diatas bukan fungsi karena f(-2) = 4 dan f(2) = 4 tidak memenuhi sifat ke-2. tetapi jika daerah domainnya merupakan himpunan bilangan integer positif maka relasi diatas merupakan fungsi.

Gambar 2.5 (a) menunjukkan fungsi karena setiap x memiliki satu y, sedangkan gambar 2.5 (b) untuk x = 0 memiliki tiga titik y.



Gambar 2.5 (a) Fungsi (b) Bukan Fungsi.

Definisi :

Misalkan f_1 dan f_2 adalah fungsi dari A ke R. Maka $f_1 + f_2$ dan $f_1 f_2$ juga merupakan fungsi dari A ke R yang didefinisikan sebagai berikut :

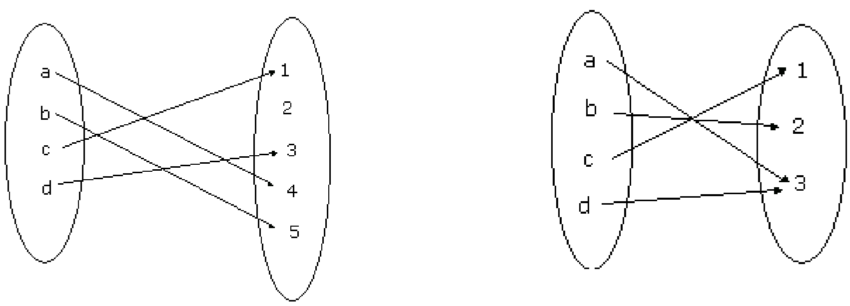
$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$

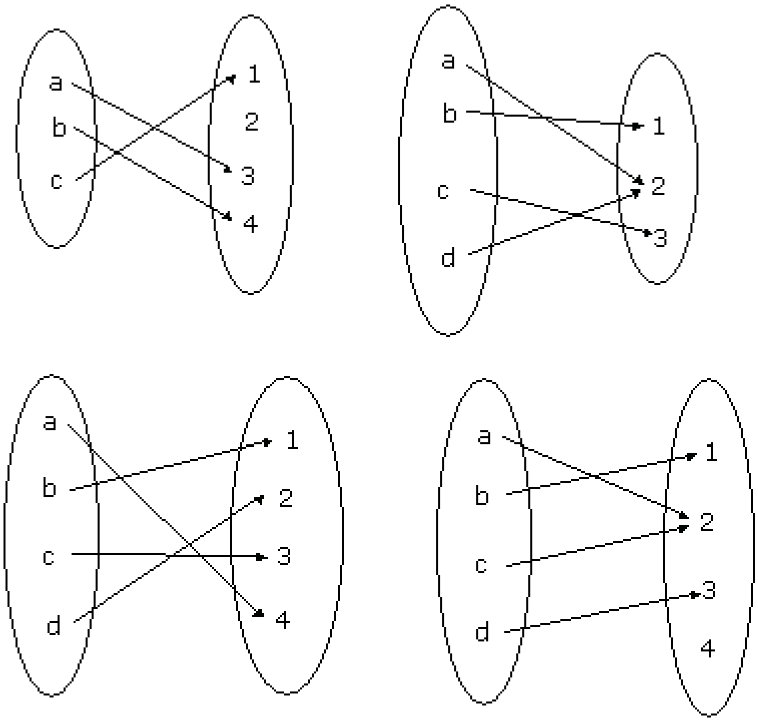
2.2.2 Fungsi One to One dan Onto

Fungsi f dari X ke Y dikatakan berkorespondensi satu-satu (one to one) atau injektif (injective) jika untuk setiap y ϵ Y, terdapat paling banyak satu x ϵ X dengan f(x) = y

Fungsi f dari X ke Y dikatakan dipetakan pada (onto) Y / surjective jika daerah hasilnya merupakan Y.



Gambar 2.6 (a) Fungsi one-to-one (b) Fungsi Onto



Gambar 2.7 (a) Fungsi one-to-one tetapi bukan Onto (b) Fungsi Onto tetapi bukan one-to-one (c) Fungsi one-to-one dan Onto (d) Bukan Fungsi one-to-one dan Onto

Contoh :

- Apakah fungsi f dari {a,b,c,d} ke {1,2,3,4,5} dengan f(a) = 4, f(b) = 5, f(c) = 1, f(d) = 3 adalah fungsi one to one.

  F = {(a,4), (b,5), (c,1), (d,3)} karena daerah hasil adalah {a,b,c,d}dan setiap nilai pada daerah asal terhubung dengan satu nilai yang berbeda pada daerah hasil.
- Apakah fungsi f(x) = x 2 merupakan fungsi one-to-one ?

  Bukan, karena f(-1) = 1 dan f(1) = 1, tetapi $-1 \neq 1$.

Definisi

Fungsi bijeksi (bijection) merupakan fungsi one-to-one dan onto.

2.2.3 Fungsi Invers

Terdapat sebuah fungsi y =f(x), fungsi inverse f^{-1} adalah himpunan {(y,x) | y =f(x)}. Fungsi Inverse belum tentu merupakan fungsi. Namun jika fungsi merupakan fungsi bijektif maka f^{-1} adalah fungsi.

Contoh fungsi $f(x) = x^2$ bukan merupakan fungsi karena $f^{-1}(4) = \sqrt{4} = \pm 2$ terdapat dua nilai y.

2.2.4 Komposisi Fungsi

Terdapat dua fungsi $g : X \to Y$ dan $f : Y \to Z$, komposisi $f \circ g$ didefinisikan sebagai berikut :

$f \circ g\,(x) = f(g(x))$ untuk setiap $x \in X$.

Contoh : g(x) = x2 -1, f(x) = 3x + 5. maka $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(3x + 5) = (3x + 5)2 - 1$

Komposisi fungsi memenuhi hokum assosiatif : $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ tetapi tidak memenuhi hukum komutatif : $f \circ g \neq g \circ f$.

2.3 Ringkasan

- Terdapat himpunan A dan B. Relasi Biner dari A ke B adalah himpunan bagian dari Cartesian Product A X B. Relasi dari Himpunan A adalah relasi dari A ke A.
- Relasi mempunyai sifat simetris, antisimetris, refleksif dan transitif.
- Ada beberapa cara untuk menyatakan sebuah relasi pada himpunan berhingga.
    - Dengan mendaftar pasangan berurutan dari relasi tersebut
    - Dengan matrik 0-1
    - Dengan directed graph.
- Fungsi merupakan jenis khusus pada relasi. Jika f adalah relasi dari X ke Y agar f juga merupakan fungsi domain dari f harus sama dengan X dan jika (x,y) dan (x,y’) berada di f, kita harus mempunyai y = y’

2.4 Latihan Soal

1. Daftar semua pasangan relasi R dari A = {0,1,2,3,4}ke B = {0,1,2,3} dimana (a,b) $\in$ R jika dan hanya jika

   (a) a = b　　　　(d) a membagi b (a|b)

   (b) a + b = 4　　　(e) gcd (a,b) = 1 (FPB dari a dan b adalah 1)

(c) a > b

2. Apakah Relasi pada {1,2,3,4} dibawah ini refleksif, simetrik, antisimetrik dan transitif ?

   a. {(2,2) , (2,3) , (2,4) , (3,2) , (3,3) , (3,4) }
   b. {(1,1) , (1,2) , (2,1) , (2,2) , (3,3) , (4,4) }
   c. {(2,4) , (4,2)}
   d. {(1,2) , (2,3) , (3,4) }

3. Jelaskan mengapa f bukan merupakan fungsi dari R ke R pada persamaan berikut ini ?(a) f(x) = 1/x (b) f(x) = $\sqrt{x}$ (c) f(x) $\pm\sqrt{(x^2+1}$

4. Tentukan apakah fungsi di bawah ini adalah bijektif dari R ke R ?

   (a) f(x) = 2x + 1
   (b) f(x) = x^2+1
   (c) f(x) = x^3
   (d) f(x) = $(x^2 + 1) / (x^2 + 2)$

5. Dapatkan fog(x) dan gof(x) dimana f(x) = $x^2 + 1$ dan g(x) = x + 2

Bab 3

Teori Dasar Logika

POKOK BAHASAN:

- ✓ Logika Proporsional
- ✓ Mengkombinasikan proposisi
- ✓ Tabel Kebenaran
- ✓ Hukum – Hukum Logika
- ✓ Disjungsi Ekslusif
- ✓ Proposisi bersyarat
- ✓ Varian Proposisi bersyarat
- ✓ Bikondisional

TUJUAN BELAJAR:

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

- ✓ Memahami tentang konsep dasar penalaran / logika
- ✓ Memahami tentang definisi proposisi dan bagaimana mengkombinasikan proposisi dengan operator logika tertentu
- ✓ Memahami tentang proposi bersyarat dan bikondisional
- ✓ Memahami Varian Proposisi bersyarat

Logika merupakan dasar dari semua penalaran(*reasoning*). Pelajaran logika dikaitkan dengan hubungan antara pernyataan-pernyataan (statement). Logika mempunyai aplikasi yang luas didalam ilmu komputer, misalnya dalam bidang ilmu pemrograman, analisis kebenaran algoritma, kecerdasan buatan , perancangan komputer dan sebagainya.

3.1 Definisi Proposisi

Didalam matematika, tidak semua pernyataan berhubungan dengan logika. Hanya pernyataan yang mempunyai nilai benar atau salah saja yang digunakan dalam penalaran. Pernyataan tersbut dinamakan proposisi *(preposition)*.

Definisi :

Proposisi adalah statement / pernyataan yang bernilai benar atau salah tetapi tidak keduanya. Nama lain untuk proposisi adalah kalimat terbuka.

Contoh :

Semua dibawah ini merupakan proposisi

1. Washington DC merupakan ibukota Amerika Serikat.
2. Toronto adalah ibukota Kanada.
3. $1 + 1 = 2$
4. Untuk setiap bilangan bulat positif n, terdapat bilangan prima yang lebih besar dari n.

Yang bukan merupakan proposisi

1. Sekarang jam berapa ?
2. Bacalah dengan teliti.
3. $x + 1 = 2$
4. $x + y = z$.

Pernyataan berikut ini :

'Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka 2n-1 adalah bilangan ganjil'

adalah proposisi yang bernilai benar karena pernyataan tersebut merupakan cara lain untuk menyatakan bilangan ganjil. Begitu juga pernyataan

$x + y = y + x$ untuk setiap x dan y bilangan riil

Adalah proposisi untuk menyatakan hukum komutatif penjumlahan pada bilangan riil. Nilai x dan y tidak perlu diberi suatu nilai karena dalam kondisi apapun nilai x dan y pasti memenuhi keadaan diatas.

3.2 Mengkombinasikan proposisi

Satu atau lebih proposisi dapat dikombinasikan untuk menghasilkan proposisi baru. Operator yang digunakan untuk mengkombinasikan proposisi disebut operator logika. Operator logika dasar yang digunakan adalah and , or dan not. And dan or merupakan operator biner karena mengoperasikan dua buah proposisi, sedangkan operator not merupakan operator unary karena hanya membutuhkan satu proposisi.

Definisi

Misalkan p dan q adalah proposisi.

- Konjungsi p dan q dinyatakan dengan $p \wedge q$ adalah proposisi p dan q. Konjungsi $p \wedge q$ benar apabila p dan q keduanya benar; sebaliknya $p \wedge q$ salah jika p atau q salah.
- Disjungsi p dan q dinyatakan dengan $p \vee q$ adalah proposisi p atau q. Disjungsi p V q benar apabila p atau q atau keduanya benar; sebaliknya p V q salah hanya kedua p dan q salah.
- Negasi p dinyatakan dengan ~p

Tabel 3.1 Tabel kebenaran AND

Tabel Kebenaran Konjungsi p dan q		
p	q	p ^ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Tabel 3.2 Tabel kebenaran OR

Tabel Kebenaran Disjungsi p dan q		
p	q	p v q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Contoh :

P : Hari ini hujan

Q : Murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \wedge q$: Hari ini hujan dan Satu Murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \vee q$: ini hujan atau Satu Murid-murid diliburkan dari sekolah

Contoh :

P : Hari ini hujan

Q : Hari ini dingin

$q \vee \sim p$: Hari ini dingin atau hari ini tidak hujan

$\sim p \wedge \sim q$: Hari ini tidak hujan dan hari ini tidak dingin

Contoh :

Diketahui proposisi-proposisi berikut :

p : Pemuda itu tinggi

q : Pemuda itu tampan

Nyatakan dalam bentuk simbolik proposisi berikut (asumsikan "Pemuda itu pendek" berarti "Pemuda itu tidak tinggi")

(a) Pemuda itu tinggi dan tampan

(b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan

(c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan

(d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan

(e) Pemuda itu tinggi atau pendek dan tampan

(f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

Penyelesaian :

(a) $p \wedge q$ (b) $p \wedge \sim q$ (c) $\sim p \wedge \sim q$ (d) $\sim(\sim p \vee \sim q)$ (e) $p \vee (\sim p \wedge q)$ (f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

3.3 Disjungsi Eksklusif (operator xor)

Kata "atau" (or) dalam operasi logika digunakan dalam dua cara. Cara pertama "atau" digunakan secara inklusif (inclusive or) yaitu dalam bentuk "p atau q atau keduanya" misalnya pada pernyataan "Tenaga IT yang dibutuhkan menguasai Bahasa C++ atau

Java”. Artinya dijungsi dengan operator “atau” akan bernilai benar jika salah satu dari proposisi atomiknya benar atau keduanya benar. Cara keduanya “atau” digunakan secara eksklusif (exclusive or) yaitu dalam bentuk “p atau q tetapi bukan keduanya”. Disjungsi Ekslusif menggunakan operator logika xor

Definisi

- Exclusif OR dinyatakan dengan $p \oplus q$. Eksklusif OR $p \oplus q$ benar apabila tepatnya satu dari p dan q benar ; jika tidak memenuhi kondisi tersebut maka $p \oplus q$ salah.

Tabel 3.3 Tabel Kebenaran XOR

Tabel Kebenaran Eksklusif OR p dan q		
p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Contoh :

Pada sebuah perlombaan, pemenang dijanjikan mendapat hadiah. Hadiahnya adalah sebuah pesawat televisi 20 inchi. Jika pemenang tidak menginginkan membawa TV, panitia menggantinya dengan senilai uang. Jelas disini bahwa hadiah yang dapat dibawa pulang hanya salah satu dari uang atau TV dan tidak bisa keduanya. Kata “atau” disini digunakan secara eksklusif. Misalkan p adalah proposisi “Juara lomba mendapat hadiah pesawat TV 20 inchi” dan q adalah proposisi “Juara lomba mendapat hadiah uang”. Maka proposisi “Juara lomba mendapat hadiah pesawat TV 20 inchi atau uang” kita tuliskan $p \oplus q$.

3.4 Proposisi Bersyarat dan Kesamaan Logika

Definisi :

Misalkan p dan q adalah proposisi.

Proposisi Majemuk : Jika p maka q

disebut proposisi bersyarat,dinotasikan dengan p → q. Proposisi p disebut hipotesis (antesenden) dan proposisi q disebut konklusi (konsekuen).

Tabel 3.4 Tabel Kebenaran Proposisi Bersyarat

Tabel Kebenaran proposisi bersyarat p dan q		
p	q	P → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Implikasi p → q dapat diekspresikan dalam bentuk pernyataan :

- Jika p maka q
- Jika p,q
- P mengakibatkan q
- Q jika p
- P hanya jika q
- P syarat cukup untuk q
- Q syarat perlu untuk q
- Q bilamana p

Contoh :

- Proposisi-proposisi berikut adalah implikasi dalam berbagai bentuk :
- Jika hari hujan maka tanaman akan tumbuh subur
- Jika tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang
- Es yang mencair dikutub mengakibatkan permukaan air laut naik
- Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan
- Syarat cukup agar pom bensin bisa meledak adalah percikan api dari rokok
- Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
- Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebangi.

Contoh :

Hukum De Morgan $(p \vee q)^c \equiv p^c \wedge q^c$ $\quad (p \wedge q)^c \equiv p^c \vee q^c$

Tabel kebenaran untuk Hukum DeMorgan ditunjukkan pada tabel 2.5 dimana $P = (p \vee q)^c$ dan $Q = p^c \wedge q^c$ ekuivalen secara logika.

Tabel 3.5 Tabel kebenaran $(p \vee q)^c$ dan $p^c \wedge q^c$

p	Q	$P = (p \vee q)^c$	$Q = p^c \wedge q^c$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

Tunjukkan bahwa $(p \rightarrow q)$ ekuivalen secara logika $p^c \vee q$

Contoh :

$(p \rightarrow q) \equiv p^c \vee q$ ditunjukkan pada tabel 2.6

Tabel 3.6 Tabel kebenaran $(p \rightarrow q)^c$ dan $(p^c \vee q)$

P	Q	p^c	$P = (p \rightarrow q)^c$	$Q = (p^c \vee q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Teorema

Proposisi bersyarat $p \rightarrow q$ dan kontrapositifnya $q^c \rightarrow p^c$ ekuivalen secara logika

Proposisi bersyarat $p \rightarrow q^c$ dan kontrapositifnya $q \rightarrow p^c$ ekuivalen secara logika

Tabel 3.7 Tabel kebenaran konvers, invers dan kontrapositif

p	q	p^c	q^c	$(p \rightarrow q)$	$q^c \rightarrow p^c$	$p \rightarrow q^c$	$q \rightarrow p^c$
T	T	F	F	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T

3.5 Varian Proposisi Bersyarat

Terdapat bentuk implikasi lain yang berkaitan dengan $p \rightarrow q$ yaitu proposisi sederhana yang merupakan varian dari implikasi. Ketiga varian proposisi bersyarat tersebut adalah konvers, invers dan kontraposisi dari proposisi asal $p \rightarrow q$

Konvers : $q \rightarrow p$

Invers : $p^c \rightarrow q^c$

Kontraposisi : $q^c \rightarrow p^c$

Contoh :

Tentukan konvers, invers dan kontraposisi dari pernyataan berikut :

‘ Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya ‘

Penyelesaian :

Konvers : ‘ Jika Amir orang kaya maka ia mempunyai mobil ‘

Invers : ‘ Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya ‘

Kontraposisi : ‘ Jika Amir bukan orang kaya maka ia tidak mempunyai mobil ‘

3.6 Bikondisional (Bi-implikasi)

Proposisi bersyarat lainnya adalah ‘p jika dan hanya jika q’ yang dinamakan bikondisional atau biimplikasi.

Definisi :

Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi Majemuk : p jika dan hanya jika q disebut proposisi bikondisional (dwisyarat) dan dinotasikan $p \leftrightarrow q$

Tabel 3.8 Tabel Kebenaran Proposisi Bersyarat

Tabel Kebenaran proposisi bersyarat p dan q		
p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Berdasarkan definisi p $\leftrightarrow$ q ekuivalen secara logika dengan p $\rightarrow$ q dan q $\rightarrow$ p

Tabel kebenaran untuk p $\leftrightarrow$ q $\equiv$ p $\rightarrow$ q dan q $\rightarrow$ p

Tabel 3.9 Tabel Kebenaran p $\leftrightarrow$ q dan (p $\rightarrow$ q dan q $\rightarrow$ p)

P	Q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

Terdapat sejumlah cara untuk menyatakan bikondisional dalam kata-kata :

- P jika dan hanya jika q

  P adalah syarat perlu dan cukup untuk q
- Jika p maka q dan sebaliknya
- P iff q

Contoh biimplikasi :

- 1+1=2 jika dan hanya jika 2+2 = 4
- Syarat cukup dan perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi
- Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang dan sebaliknya

Definisi

Misalkan bahwa proposisi majemuk P dan Q terdiri dari proposisi $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. P dan Q adalah ekuivalen secara logika dilambangkan dengan P $\Leftrightarrow$ Q, jika P $\leftrightarrow$ Q adalah tautologi.

Yang menyatakan bahwa untuk nilai kebenaran sembarang yang diberikan dari $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, p dan Q keduanya bisa benar ataupun keduanya salah.

3.7 Ringkasan

- Proposisi adalah pernyataan yang bernilai benar atau salah.
- Satu atau lebih proposisi dapat dikombinasikan untuk menghasilkan proposisi baru. Operator yang digunakan untuk mengkombinasikan proposisi disebut

operator logika. Operator logika dasar yang digunakan adalah and , or dan not. And dan or merupakan operator biner karena mengoperasikan dua buah proposisi, sedangkan operator not merupakan operator unary karena hanya membutuhkan satu proposisi.

- Varian Proposisi Bersyarat $p \rightarrow q$ adalah Konvers $q \rightarrow p$, Invers $p^c \rightarrow q^c$ dan Kontraposisi : $q^c \rightarrow p^c$

3.8 Latihan Soal

1. Apakah pernyataan di bawah ini merupakan proposisi. Untuk setiap pernyataan yang merupakan proposisi berikan domainnya

   (a) $(2n + 1)^2$ adalah bilangan ganjil

   (b) Terdapat x sehingga $x < y$ (x,y bilangan real)

   (c) Pilih bilangan bulat antara 1 dan 10

   (d) $1 + 3 = 4$

2. Evaluasi untuk setiap proposisi berikut ini dengan nilai kebenaran p = F , q = T , r = F. Dan buat tabel kebenaran dari tiap prosisi di bawah ini.

   (a) $\sim p \vee q$

   (b) $\sim (p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$

   (c) $(p \vee \sim r) \wedge \sim ((q \vee r) \vee \sim (r \vee p))$

3. Misalkan p adalah “Iwan bisa berbahasa Inggris” q adalah “Iwan bisa berbahasa Jerman” dan r adalah “Iwan bisa berbahasa Perancis”. Terjemahkan kalimat majemuk berikut ke dalam notasi simbolik

   (a) Iwan bisa berbahasa Inggris atau Jerman

   (b) Iwan bisa berbahasa Jerman tetapi tidak bahasa Perancis

   (c) Iwan bisa berbahasa Inggris atau bahasa Jerman atau dia tidak bisa berbahasa Perancis atau berbahasa Jerman

   (d) Tidak benar bahwa Iwan bisa berbahasa Inggris atau bahasa Perancis

   (e) Tidak benar bahwa Iwan tidak bisa berbahasa Inggri, Perancis maupun Jerman

4. Nyatakan konvers dan kontraposisi dari implikasi berikut :

   (a) Saya masuk kuliah bilamana ada kuis

(b) Sebuah bilangan positif hanya prima jika ia tidak mempunyai pembagi selain 1 dan dirinya sendiri.

Bab 4

Teori Logika Lanjut

POKOK BAHASAN:

- ✓ Inferensi Logika
- ✓ Kuantifier

TUJUAN BELAJAR:

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

- ✓ Memahami tentang konsep pengsmbilan keputusan
- ✓ Memahami tentang pengunaan kuantifier

4.1 Inferensi Logika

Logika selalu berhubungan dengan pernyataan-pernyataan. Untuk menentukan benar tidaknya suatu kesimpulan, didasarkan pada pernyataan-pernyataan yang telah diketahui nilai kebenarannya. Dalam subbab berikutnya akan dibahas metode-metode inferensi.

4.2 Argumen Valid dan Tidak Valid

Sebuah argumen adalah deretan dari proposisi-prosisi yang ditulis sebagai berikut

p_1

p_2

p_3 → Hipotesa

…

p_n

\q (Jadi q) → Kesimpulan

Suatu argumen disebut valid jika dan hanya jika pi , i=1, 2, … n adalah benar dan q juga bernilai benar. Jika tidak memenuhi ketentuan tersebut maka argumen dikatakan tidak valid.

Untuk mengecek apakah suatu argumen itu valid, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

- Tentukan hipotesa dan kesimpulan kalimat
- Buat tabel kebenaran untuk semua hipotesa dan kesimpulan
- Carilah baris kritis yaitu baris di mana semua hipotesa bernilai benar.
- Dalam baris kritis tersebut, jika semua nilai kesimpulan benar, maka argumen itu valid. Jika diantara baris kritis tersebut ada baris dengan kesimpulan yang salah maka argumen tersebut adalah invalid.

Contoh :

Tentukan apakah argumen di bawah ini valid atau tidak valid ?

- $p \rightarrow q$

  $\underline{\sim r \rightarrow \sim q}$

  \ r

Penyelesaian :

Terdapat dua hipotesa yaitu $p \rightarrow q$ dan $\sim r \rightarrow \sim q$, kesimpulannya adalah r. Tabel kebenaran ditunjukkan pada tabel 4.1

Tabel 4.1 Tabel kebenaran $p \rightarrow q$ dan $\sim r \rightarrow \sim q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim r \rightarrow \sim q$	r
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F

Pada baris ke-3 dan ke-4 semua hipotesa bernilai true, tetapi mempunyai kesimpulan false, sehingga argumen ini tidak valid.

Contoh :

- p → q

  q

  \ p

Penyelesaian :

Terdapat dua hipotesa yaitu p→q dan q, kesimpulannya adalah p. Tabel kebenaran ditunjukkan pada tabel 4.2.

Tabel 4.2 Tabel kebenaran p→q dan q

p	**q**	**p → q**	**p**
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

Pada baris ke-1 dan ke-3 semua hipotesa bernilai true, tetapi pada baris ke-3 mempunyai kesimpulan false, sehingga argumen ini tidak valid.

Contoh :

p v (q v r)

~r

\pvq

Penyelesaian :

Terdapat dua hipotesa yaitu p v (q v r) dan ~r, kesimpulannya adalah pvq. Tabel kebenaran ditunjukkan pada tabel 4.3.

Tabel 4.3 Tabel kebenaran p v (q v r) dan ~r

p	**q**	**r**	**q v r**	**p v (q v r)**	**~r**	**pvq**
T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T

T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F

Pada baris 2,4, dan 6 semua hipotesa dan kesimpulan bernilai true sehingga argumen ini dikatakan valid.

4.3 Metode-Metode Inferensi

Dalam sub-bab ini akan dibahas beberapa metode inferensi, yaitu teknik untuk menurunkan kesimpulan berdasarkan hipotesa yang ada, tanpa harus menggunakan tabel kebenaran. Beberapa metode inferensi untuk menentukan kevalidan adalah sebagai berikut :

4.3.1 Modus Ponen

Modus Ponen dapat dinyatakan sebagai berikut :

$p \rightarrow q$

$\underline{p\quad\quad}$

q

Tabel kebenaran dari modus ponen ditunjukkan pada tabel 4.4.

Tabel 4.4 Tabel kebenaran Modus Ponen

p	**q**	**p → q**	**p**	**q**
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

Baris 1 hipotesa dan kesimpulan bernilai true, sehingga argumen ini valid.

Contoh :

- Jika digit terakhir suatu bilangan adalah 0, maka bilangan tersebut habis dibagi 10.
- Digit terakhir suatu bilangan adalah 0
- /Bilangan tersebut habis dibagi 10

4.3.2 Modus Tollens

Bentuk Modus Tollens mirip dengan Modus Ponens, hanya saja hipotesa kedua dan kesimpulan merupakan kontraposisi hipotesa pertama modus ponens. Suatu implikasi selalu ekivalen dengan kontraposisinya. Bentuk inferensi dari Modus Tollens adalah sebagai berikut :

- $p \rightarrow q$
- $\sim q$
- $/ \sim p$

Contoh :

Jika Zeus seorang manusia, maka ia dapat mati

Zeus tidak dapat mati

/ Zeus bukan seorang manusia

4.3.3 Penambahan Disjungtif

Inferensi penambahan disjungtif didasarkan atas fakta bahwa suatu kalimat dapat digeneralisasi dengan penghubung V, karena penghubung V bernilai benar jika salah satu komponennya benar. Sebagai contoh, perhatikan kalimat yang diucapkan Intan, Saya suka jeruk (bernilai benar). Kalimat tersebut akan tetap bernilai benar jika ditambahkan kalimat lain, dengan penghubung v. Jadi kalimat “Saya suka jeruk atau durian” tetap bernilai benar dan tidak tergantung pada suka/tidaknya Intan akan durian. Bentuk dari penambahan disjungtif adalah sebagai berikut :

– p	q
– $/ p \vee q$	$/ p \vee q$

4.3.4 Penyederhanaan Konjungtif

Inferensi penyederhanaan konjungtif merupakan kebalikan dari inferensi penambahan disjungtif. Jika beberapa hipotesa dihubungkan dengan ^ , hipotesa tersebut dapat diambil salah satu secara khusus. Bentuk dari penyederhanaan konjungtif adalah :

$p \wedge q$	$p \wedge q$
/ p	/ q

Contoh :

Lina menguasai bahasa Basic and Pascal

Lina menguasai bahasa Basic

4.3.5 Silogisme Disjungtif

Prinsip dasar Silogisme Disjungtif adalah apabila kita dihadapkan pada satu diantara dua pilihan (A atau B). Jika tidak memilih A maka pilihan yang mungkin adalah B. Hal ini sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, misal jika seseorang ditanyai penjual di warung, “kamu minum es jeruk atau es teh ?”. Pembeli memilih salah satu, karena ia tidak suka jeruk, pasti ia memilih es teh. Bentuk dari silogisme disjungtif :

$p \vee q$

$\sim p$

/ q

Contoh :

Kunci kamarku ada di sakuku atau tertinggal di rumah

Kunci kamarku tidak ada di sakuku

Kunci kamarku tertinggal di rumah

4.3.6 Silogisme Hipotesis

Prinsip inferensi Silogisme Hipotesis adalah sifat transitif pada implikasi. Jika $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow r$ keduanya bernilai benar maka $p \rightarrow r$ bernilai benar pula. Bentuk umum dari inferensi Silogisme Hipotesis adalah :

$p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

\ p→r

Contoh :

Jika 18486 habis dibagi 18, maka 18486 habis dibagi 9

Jika 18486 habis dibagi 9, maka jumlah digit-digitnya habis dibagi 9.

Jika 18486 habis dibagi 18, maka jumlah digit-digitnya habis dibagi 9.

4.3.7 Konjungsi

Inferensi konjungsi, terdapat dua hipotesa dengan nilai kebenaran true maka gabungan dari kedua kalimat dengan menggunakan penghubung ^ juga bernilai benar. Bentuk inferensi konjungsi adalah :

p

q

p ^ q

Contoh :

Pada suatu hari ini, Anda pergi ke kampus dan baru sadar bahwa Anda tidak memakai kacamata. Setelah mengingat-ingat, ada beberapa fakta yang Anda pastikan kebenarannya :

- Jika kacamataku ada di meja dapur, maka aku pasti sudah melihatnya ketika sarapan pagi
- Aku membaca koran di ruang tamu atau aku membacanya di dapur
- Jika aku membaca koran di ruang tamu, maka pastilah kacamata kuletakkan di meja tamu
- Aku tidak melihat kacamataku pada waktu sarapan pagi
- Jika aku membaca buku di ranjang, maka kacamata kuletakkan di meja samping ranjang.
- Jika aku membaca koran di dapur, maka kacamataku ada di meja dapur.

Penyelesaian :

Untuk memudahkan pemahaman dan penggunaan hokum-hukum inferensi, maka kalimat-kalimat tersebut lebih dulu dinyatakan dalam symbol-simbol logika.

- P : kacamataku ada di meja dapur
- Q : Aku melihat kacamataku ketika sarapan pagi
- R : Aku membaca koran di ruang tamu
- S : Aku membaca koran di dapur
- T : kacamata kuletakkan di meja tamu
- U : Aku membaca buku di ranjang
- W : kacamata kuletakkan di meja samping ranjang
- Dengan simbol-simbol tersebut maka fakta-fakta diatas dapat ditulis sebagai berikut :
  - $P \rightarrow Q$
  - $R \vee S$
  - $R \rightarrow T$
  - $\sim Q$
  - $U \rightarrow W$
  - $S \rightarrow P$

Inferensi yang dapat dilakukan adalah sebagai berikut :

- $P \rightarrow Q$
- $\sim Q$
- \ ~P (Modus Tollen)

- $S \rightarrow P$
- $\sim P$
- \ ~S (Modus Tollen)
- $R \vee S$
- $\sim S$
- \ R (Silogisme Disjungtif)

- R → T
- R
- \ T (Modus Ponen)

Kesimpulan : kacamata ada di meja tamu

4.4 Predikat dan Kuantifier

Pernyataan-pernyataan yang melibatkan variabel seperti

”x>3”, ”x = y + 3” dan ”x + y = z”

sering digunakan dalam pernyataan matematika dan program komputer. Pernyataan-pernyataan ini bisa bernilai benar atau salah tergantung dari variabel yang dimasukkan. Pernyataan ”x lebih besar dari 3” mempunyai dua bagian. Bagian pertama variabel x sebagai subyek pernyataan. Bagian kedua adalah predikat atau fungsi proposisi ”lebih besar dari 3”, dinyatakan dengan P(x) dimana P menyatakan predikat ”lebih besar dari 3” dan x adalah variabelnya. Setiap nilai yang dimasukkan ke x, maka pernyataan (x) akan menjadi proposisi dan dapat ditentukan nilai kebenarannya.

Contoh :

Terdapat P(x) menyatakan $x > 3$. Apa nilai kebenaran dari P(4) dan P(5) ?

Penyelesaian :

Pernyataan P(4) berarti $x = 4$ pada pernyataan $x>3$. Sehingga P(4) menyatakan $4>3$ yang bernilai benar. P(2) menyatakan $2>3$ yang bernilai salah.

Contoh :

Terdapat Fungsi Proposisi Q(x, y, z) yang didefinisikan : $x + y = z$. Apakah nilai kebenarannya dari Q(2,3,5), Q(0,1,2), dan Q(9,-9,0) ?

Penyelesaian :

Fungsi Proposisi Q(2,3,5) menyatakan x = 2 y = 3 dan z = 5. Sehingga Q(2,3,5) menyatakan 2 + 3 = 5 merupakan proposisi yang bernilai benar. Q(0,1,2) menghasilkan proposisi 0 + 1 = 2 yang bernilai salah. Q(9,-9,0) menghasilkan proposisi 9 + -9 = 0 yang bernilai benar.

Contoh :

Misalkan P(n) menyatakan n adalah bilangan ganjil dengan domain D adalah himpunan bilangan bulat positif. Maka P adalah fungsi proposisi karena setiap n di D, P(n) adalah proposisi karena dapat ditentukan nilai kebenarannya.

Sebagai contoh jika n = 1 diperoleh proposisi, 1 adalah bilangan ganjil yang bernilai benar. Jika n = 2 diperoleh proposisi, 2 adalah bilangan ganjil yang bernilai salah.

Definisi

Misalkan P adalah fungsi proposisi dengan daerah asal/domain D. Pernyataan untuk setiap x, P(x) disebut pernyataan kuantor universal, dinotasikan dengan simbol ∀ berarti untuk setiap. Dapat ditulis ∀x, P(x).

Pernyataan untuk setiap x, dimana P(x) bernilai benar jika P(x) benar untuk setiap x di D. Pernyataan untuk setiap x, P(x) adalah salah untuk sedikitnya satu x di D.

Pernyataan untuk beberapa x, P(x) dinyatakan dengan simbol ∃ disebut *kuantor eksistensial*. Pernyataan untuk beberapa x, P(x) dapat ditulis ∃x, P(x). Pernyataan ∃x, P(x) benar jika P(x) benar untuk paling sedikit satu x di D. Pernyataan ∃x, P(x) adalah salah jika P(x) untuk setiap x di D.

Tabel 4.5 Kuantifier

Pernyataan	**Kapan Benar ?**	**Kapan Salah ?**
∀x P(x).	P(x) benar untuk setiap x	Ada sebuah nilai x dimana P(x) bernilai salah
∃x P(x)	Ada sebuah x sehingga P(x) bernilai benar	P(x) salah untuk setiap x

Contoh :

Pernyataan $\forall x$, $x^2 \geq 0$ dengan Domain himpunan bilangan real adalah benar karena untuk setiap bilangan real x, kalau dikuadratkan akan bernilai positif atau nol.

Contoh :

Pernyataan kuantor universal $\forall x$, jika $x>1$ maka $x+1 > 1$ dengan Domain himpunan bilangan real adalah benar. Kita harus membuktikan jika $x>1$ maka $x+1 > 1$ adalah benar untuk setiap bilangan real x.

Pembuktian :

Misalkan x adalah sembarang bilangan real, maka hal ini berlaku untuk $x \leq 1$ atau $x > 1$. Pada kasus untuk $x \leq 1$ (hipotesis salah), proposisi bersyarat akan bernilai benar tanpa memperhatikan apakah konklusinya benar atau salah.

Misalkan $x > 1$ maka pernyataan $x + 1 > 1$ adalah benar, sehingga hipotesis dan konklusi keduanya benar, maka proposisi bersyarat jika $x>1$ maka $x+1 > 1$ benar. Oleh karena itu, pernyataan kuantor universal $\forall x$, jika $x>1$ maka $x+1 > 1$ benar.

Contoh :

Pernyataan kuantor universal $\forall x$, $x^2 – 1 > 0$ salah karena jika $x = 1$, proposisi $1^2 – 1 > 0$ salah. Karena terdapat satu nilai pada daerah Domain yang salah maka pernyataan kuantor universal $\forall x$, $x^2 – 1 > 0$ adalah salah.

Contoh :

Apakah nilai kebenaran dari pernyataan kuantor eksistensial $\exists n$, jika n bilangan prima maka n + 1 , n + 2 , n + 3, n + 4 bukan bilangan prima ?

Penyelesaian :

Benar karena kita bisa mencari paling sedikit satu bilangan bulat n yang membuat proposisi bersyarat benar misal n = 23, jika 23 bilangan prima maka 24,25,26,27 bukan bilangan prima (proposis bersyarat ini benar karena hipotesis maupun konklusi salah). Dan tidak semua bilangan pada domain bernilai benar contoh n = 2 maka 3,4,5,6 bukan bilangan prima merupakan proposisi yang bernilai salah.

4.5 Negasi Kuantifier

Misal terdapat pernyataan :

"Setiap mahasiswa dalam kelas ini telah mengambil Kalkulus I" dapat dinyatakan dengan fungsi proposisi $\forall x\ P(x)$ dimana $P(x)$ adalah x yang telah mengambil Kalkulus.

Negasi dari pernyataan ini adalah "Tidak semua mahasiswa dalam kelas ini telah mengambil Kalkulus I". Pernyataan ini ekuivalen dengan pernyataan "Ada seorang mhs dalam kelas ini belum mengambil Kalkulus I" mengambil Kalkulus I" [$\exists x\ P(x)$]

Jadi, $\mathbf{\neg \forall x\ P(x) \equiv \exists x \neg P(x)}$.

Tabel 4.6 Negasi Kuantifier

Pernyataan	Negasi
$\neg \forall x\ P(x)$	$\exists x \neg P(x)$.
$\neg \exists x\ P(x)$	$\forall x \neg P(x)$

Contoh :

Carilah negasi dari pernyataan berikut:

- $\forall$ bilangan prima x, x adalah bilangan ganjil.
- Tidak ada politikus yang jujur.
- Beberapa hacker usianya lebih dari 40 tahun

Penyelesaian :

- $\exists$ bilangan prima x, maka x bukan bilangan ganjil
- $\exists$ politikus x, maka x adalah orang yang jujur atau dalam statement informal : Beberapa politikus bersifat jujur.

- Tidak ada hacker yang usianya lebih dari 40 tahun atau Semua hacker usianya 40 tahun atau kurang dari itu.

4.6 Kuantifier yang Lebih Kompleks

Contoh :

Misal C(x) menyatakan “x yang mempunyai komputer”, F(x,y) adalah x dan y adalah teman. Domainnya adalah semua mahasiswa di PENS. Nyatakan pernyataannya dibawah ini dengan menggunakan kalimat : $\forall x\ (C(x) \cup \exists y(\ C(y) \cap F(x,y)))$

Penyelesaian :

$\forall x\ (C(x) \cup \exists y(\ C(y) \cap F(x,y)))$ menyatakan untuk setiap mahasiswa x di PENS, yang mempunyai komputer atau ada seorang mahasiswa y sedemikian sehingga mempunyai komputer dan x dan y adalah teman. Dengan bahasa informalnya adalah setiap mahasiswa di PENS yang mempunyai komputer atau mempunyai seorang teman yang mempunyai komputer.

Contoh :

Terdapat P(x) yang menyatakan x+y = y+x. Apakah nilai kebenaran dari Kuantifier $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$?

Penyelesaian :

$\forall x\ \forall y\ P(x,y)$ menyatakan proposisi “Untuk semua bilangan real x dan untuk semua bilangan real y memenuhi x+y = y+x”. Karena P(x,y) true untuk semua bilangan real x dan untuk semua bilangan real y memenuhi x+y = y+x” maka $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$ adalah true.

4.7 Ringkasan

- Logika selalu berhubungan dengan pernyataan-pernyataan. Untuk menentukan benar tidaknya suatu kesimpulan, didasarkan pada pernyataan-pernyataan yang telah diketahui nilai kebenarannya. Metode-metode yang digunakan untuk pengambilan kesimpulan adalah Modus Ponen, Modus Tollens, Penambahan

Disjungtif, Penyederhanaan Konjungtif, Silogisme Disjungtif, Silogisme Hipotesis dan Konjungsi

- Untuk mengecek apakah suatu argumen itu valid, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :
    - Tentukan hipotesa dan kesimpulan kalimat
    - Buat tabel kebenaran untuk semua hipotesa dan kesimpulan
    - Carilah baris kritis yaitu baris di mana semua hipotesa bernilai benar.
    - Dalam baris kritis tersebut, jika semua nilai kesimpulan benar, maka argumen itu valid. Jika diantara baris kritis tersebut ada baris dengan kesimpulan yang salah maka argumen tersebut adalah invalid.
    - Misalkan P adalah fungsi proposisi dengan daerah asal/domain D. Pernyataan untuk setiap x, P(x) disebut pernyataan kuantor universal, dinotasikan dengan simbol $\forall$ berarti untuk setiap. Dapat ditulis $\forall$x, P(x). Pernyataan untuk setiap x, dimana P(x) bernilai benar jika P(x) benar untuk setiap x di D. Pernyataan untuk setiap x, P(x) adalah salah untuk sedikitnya satu x di D.
    - Pernyataan untuk beberapa x, P(x) dinyatakan dengan simbol $\exists$ disebut *kuantor eksistensial*. Pernyataan untuk beberapa x, P(x) dapat ditulis $\exists$x, P(x). Pernyataan $\exists$x, P(x) benar jika P(x) benar untuk paling sedikit satu x di D. Pernyataan $\exists$x, P(x) adalah salah jika P(x) untuk setiap x di D.

4.8 Latihan Soal

1. P(x) menyatakan pernyataan “$x \le 4$”. Tentukan tabel kebenaran dari:
   a. P(0) b. P(4) c. P(6)
2. P(x) menyatakan pernyataan ”kata x yang terdapat huruf a”. Tentukan tabel kebenaran di bawah ini:
   a. P(orange) b. P(lemon) c. P(true) d. P(false)
3. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut dengan domain himpunan bilangan integer.
   a. $\forall n\ (n^2 \ge 0)$ d. $\exists n\ \forall m\ (n < m^2)$
   b. $\forall n\ (n^2 \ge n)$ e. $\forall n\ \exists m\ (n^2 < m)$

c. $\exists n\ (n^2 = 2)$

4. Gunakan prinsip inferensi untuk menurunkan ~s dari hipotesa-hipotesa:

   $(s \vee q) \rightarrow p$, $\sim a$, $p \rightarrow a$

Bab 5

Strategi Pembuktian

POKOK BAHASAN:

- Notasi dari implikasi, konversi, inversi, kontrapositif, negasi dan kontradiksi
- Struktur dari Pembuktian formal
- Pembuktian Langsung
- Pembuktian dengan counterexample
- Pembuktian dengan kontrapositif
- Pembuktian dengan kontradiksi

TUJUAN BELAJAR:

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Menguraikan struktur dasar dan memberikan contoh dari masing-masing teknik pembuktian yang dijelaskan.
2. Mendiskusikan tipe pembuktian mana yang terbaik untuk sebuah permasalahan yang diberikan.

Hampir semua rumus yang berlaku dalam matematika selalu dapat dibuktikan berdasarkan definisi-definisi maupun rumus-rumus lain yang sudah pernah dibuktikan kebenarannya. Hukum-hukum/rumus-rumus yang tampaknya sederhana seperti hukum komutatif a+b=b+a juga dapat diturunkan pembuktiannya. Banyak rumus-rumus sederhana semacam itu yang sering kita gunakan tanpa memikirkan pembuktiannya. Dalam bab ini diperkenalkan bagaimana cara membuktikannya, sekaligus diberikan contoh-contohnya. Tujuan dari contoh-contoh ini adalah untuk memperkenalkan dan membiasakan diri dengan metode-metode pembuktian yang ada, sehingga dapat membuktikan sendiri teorema-teorema yang lain.

5.1 Notasi dari Implikasi, Konversi, Inversi, Kontrapositif, Negasi dan Kontradiksi

Implikasi p → q adalah proposisi yang bernilai salah jika p benar dan q salah, dan bernilai benar jika lainnya. Tabel kebenaran untuk implikasi dapat dilihat pada Tabel 5.1.

Tabel 5.1 Tabel kebenaran untuk Implikasi p → q

P	**q**	**p → q**
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Contoh implikasi adalah sebagai berikut : Implikasi "Jika hari ini jumat maka 2+3 = 7" bernilai benar untuk semua hari kecuali hari jumat, walaupun 2+3 = 7 salah.

Tautologi adalah pernyataan yang selalu benar. Sebagai contoh adalah sebagai berikut:

- $R \vee (\sim R)$
- $\sim (P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P) \vee (\sim Q)$

Jika $S \rightarrow T$ suatu tautologi, kita tulis $S \Rightarrow T$.

Jika $S \leftrightarrow T$ suatu tautologi, kita tulis $S \Leftrightarrow T$.

Kontradiksi adalah pernyataan yang selalu bernilai salah. Sebagai contoh adalah:

- $R \wedge (\sim R)$
- $\sim (\sim (P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P) \vee (\sim Q))$

Negasi dari suatu tautologi adalah suatu kontradiksi, negasi dari kontradiksi adalah suatu tautologi.

Jika terdapa sebuah implikasi p → q, maka

- q → p merupakan **konversi** dari p → q

- $\sim q \rightarrow \sim p$ disebut **kontrapositif** dari $p \rightarrow q$
- $\sim p \rightarrow \sim q$ disebut **inverse** dari $p \rightarrow q$

5.2 Struktur Untuk Pembuktian Formal

Predikat & Kuantifier

Pernyataan "x > 3" punya 2 bagian, yakni "x" sebagai subjek dan " adalah lebih besar 3" sebagai predikat P.

Kita dpt simbolkan pernyataan "x > 3" dengan P(x). Sehingga kita dapat mengevaluasi nilai kebenaran dari P(4) dan P(1).

"P(x) benar untuk semua nilai x dalam domain pembicaraan" ditulis $\forall x\ P(x)$.

Untuk menunjukkan $\forall x\ P(x)$ salah cukup dengan hanya menunjukkan/mencari satu nilai x dalam domain shg P(x) salah. Nilai x tersebut selanjutnya dikatakan *counter-example* dari pernyataan $\forall x\ P(x)$.

"Ada nilai x dalam domain pembicaraan sehingga P(x) bernilai benar" ditulis $\exists x\ P(x)$.

Negasi

"Setiap mhs dalam kelas ini telah mengambil Kalkulus I" [$\forall x\ P(x)$]
negasi dari pernyataan ini adalah : "Ada seorang mhs dalam kelas ini belum mengambil Kalkulus I" [$\exists x\ P(x)$]. Sehingga $\sim \forall x\ P(x) \equiv \exists x\ P(x)$.

Kuantifier Bersusun

- $\forall x\ \forall y\ (x+y = y+x)$

  berarti x+y = y+x berlaku untuk semua bilangan real x dan y.
- $\forall x\ \exists y\ (x+y = 0)$

  berarti untuk setiap x ada nilai y sehingga x+y = 0.
- $\forall x\ \forall y\ \forall z(x+(y+z) = (x+y)+z)$

berarti untuk setiap x, y dan z berlaku hukum asosiatif $x+(y+z) = (x+y)+z$.

5.3 Pembuktian Langsung

Implikasi $p \rightarrow q$ dapat dibuktikan dengan menunjukkan jika p benar maka q juga harus benar. Cara untuk melakukan pembuktian langsung adalah sbb:

- ❑ Pembuktian dapat dilakukan untuk rumusan $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$, dimana D adalah himpunan asal
- ❑ Pilih salah satu contoh, yang dipilih secara acak yang merupakan anggota D, misalkan dinamakan a
- ❑ Tunjukkan bahwa pernyataan $P(a) \rightarrow Q(a)$ adalah benar, dengan asumsi $P(a)$ adalah benar
- ❑ Tunjukkan bahwa $Q(a)$ benar
- ❑ Dengan aturan Generalisasi Universal (UG), $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ adalah benar

Sebagai contoh: Buktikan bahwa untuk semua bilangan genap n antara 4 sampai 30, n dapat dinyatakan sebagai jumlah dari 2 bilangan prima.

Cara pembuktian langsung:

1. D = {4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30}
2. Pilih salah satu, misalkan 20
3. 20 dapat dinyatakan sebagai jumlah dari 2 bilangan prima
4. 20 = 3 + 17
5. Dengan aturan Generalisasi Universal (UG), untuk semua bilangan genap n antara 4 sampai 30, n dapat dinyatakan sebagai jumlah dari 2 bilangan prima adalah benar

5.4 Pembuktian Tak Langsung Kontrapositif

Karena $p \rightarrow q$ ekivalen dengan $\sim q \rightarrow \sim p$ maka $p \rightarrow q$ dapat dibuktikan dengan menunjukkan bhw $\sim q \rightarrow \sim p$ benar. Cara melakukan pembuktian tak langsung kontrapositif adalah sbb:

- Implikasi $p \rightarrow q$ ekivalen dengan implikasi $\sim q \rightarrow \sim p$
- Sehingga $p \rightarrow q$ dapat dikatakan benar, dengan menunjukkan $\sim q \rightarrow \sim p$ adalah benar
- Untuk menunjukkan $\sim q \rightarrow \sim p$ benar, asumsikan negasi dari q adalah benar dan buktikan bahwa negasi dari p adalah benar.

Sebagai contoh : Buktikan bahwa untuk bilangan-bilangan bulat m dan n : Jika $m+n \geq 73$, maka $m \geq 37$ atau $n \geq 37$.

Bukti:

Jika p adalah pernyataan $m+n \geq 73$,

q adalah pernyataan $m \geq 37$,

r adalah pernyataan $n \geq 37$

maka dalam simbol kalimat di atas dapat dinyatakan sebagai $p \rightarrow (q \vee r)$

Kontrapositifnya adalah $\sim(q \vee r) \rightarrow \sim p$ atau $(\sim q \wedge \sim r) \rightarrow \sim p$, dengan demikian dibuktikan kebenaran pernyataan : Jika $m < 37$ dan $n < 37$ maka $m+n < 73$.

Untuk $m < 37$ berarti $m \leq 36$ dan $n < 37$ berarti $n \leq 36$, sehingga

$m + n \leq 36 + 36$

$m + n \leq 72$

$m + n < 73$

Terbukti bahwa jika $m < 37$ dan $n < 37$ maka $m+n < 73$.

Dengan terbuktinya kontrapositif, maka terbukti pula kebenaran pernyataan awal, yaitu:

Jika $m+n \geq 73$, maka $m \geq 37$ atay $n \geq 37$.

5.5 Pembuktian dengan Kontradiksi

Cara pembuktian dengan Kontradiksi adalah dengan mengasumsikan konklusi salah dan kemudian masukkan dalam sebuah kontradiksi.

Sebagai contoh : Buktikan bahwa jumlah bilangan prima adalah tak hingga.

Pembuktian:

- ❑ Asumsikan terdapat beberapa bilangan prima yang terhingga, kemudian kita buat list-nya p1,p2,…,pn.
- ❑ Jika kita ambil bilangan q = pn+1. q seharusnya tidak termasuk dalam deret bilangan prima.
- ❑ Jika q merupakan bilangan prima, maka hal ini merupakan kontradiksi.
- ❑ Jika pembuktian di atas terbukti kontradiksi, maka bilangan prima mempunyai deret yang jumlahnya tak hingga.

5.6 Pembuktian dengan Counterexample

Untuk menunjukkan $\forall x$ P(x) salah cukup dengan hanya menunjukkan/mencari satu nilai x dalam domain shg P(x) salah. Nilai x tersebut selanjutnya dikatakan *counter-example* dari pernyataan $\forall x$ P(x).

- ❑ Jika sebuah argumen mempunyai rumus $\forall x$ (P(x) → Q(x)), dimana himpunan asal dari x adalah D
- ❑ Untuk menunjukkan bahwa implikasi di atas salah untuk himpunan asal D, maka harus ditunjukkan x dalam D dimana (P(x) → Q(x)) adalah salah
- ❑ Artinya jika terdapat x dalam D dimana P(x) benar tetapi Q(x)salah. Maka x dinamakan **counterexample** untuk implikasi di atas
- ❑ Dengan menunjukkan implikasi (P(x) → Q(x)) adalah salah dengan mengambil x dalam D sehingga membuktikan bahwa P(x) → Q(x) adalah salah dinamakan **disproof** dari pemberian statemen dengan counterexample

Sebagai contoh adalah : Tunjukkan bahwa “setiap bilangan bulat positif adalah hasil tambah dari tiga bilangan kuadrat” adalah salah.

Solusi. Pernyataan ini benar untuk beberapa nilai, mis. $1=0^2+0^2+1^2$; $2=0^2+1^2+1^2$; $3=1^2+1^2+1^2$; $4=0^2+0^2+2^2$; $5=0^2+1^2+2^2$; $6=1^2+1^2+2^2$. Tapi kita tidak dapat mengekspresikan seperti di atas untuk bilangan 7. Jadi bilangan 7 merupakan counter-example dari pernyataan di atas.

5.7 Ringkasan

- ✓ Secara umum, jika pernyatan berupa implikasi, maka pertama kita coba dengan bukti langsung. Bila gagal, anda coba dengan bukti tak langsung. Bila tidak berhasil juga maka kemudian coba dengan bukti kontradiksi.
- ✓ Setiap metode pembuktian mempunyai ciri-ciri, kemampuan, dan kekhususan tersendiri. Ada kalanya suatu pernyataan dapat dibuktikan dengan beberapa metode berbeda dengan sama baiknya. Akan tetapi, kadang-kadang hanya dapat diselesaikan dengan suatu metode tertentu saja.

5.8 Latihan Soal

1. Kapan pernyataan berikut bernilai benar:
   "Jika hari tidak hujan maka saya pergi ke rumahmu."
2. Tentukan nilai kebenaran $\forall x\ (x^2 \geq x)$ jika:
   - x bilangan real
   - x bilangan bulat.
3. Tentukan nilai kebenaran dari $\exists x\ P(x)$ bila P(x) menyatakan "x2 > 12" dan domain pembicaraan meliputi semua bilangan bulat positif tidak lebih dari 4.
4. Carilah negasi dari pernyataan berikut:
   - "Ada politikus yang jujur" dan
   - "Semua orang Indonesia makan nasi Rawon"
5. Tentukan negasi dari $\forall x(x^2 > x)$ dan $\exists x\ (x^2 = 2)$.
6. Berikan bukti langsung dari "Jika n bilangan bulat ganjil maka n^2 ganjil."
7. Berikan bukti tak langsung dari "Jika n bulat dan n^3+5 ganjil maka n genap.

8. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan-bilangan bulat m dan n, jika m.n = 1 maka m=1 dan n=1.
9. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat a, jika (a-2) habis dibagi 3, maka $(a^2 – 1)$ habis dibagi 3 juga.
10. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat a, jika (a-1) mod 3 = 0 atau (a-2) mod 3 = 0, maka $(a^2 – 1)$ mod 3 = 0.
11. Dengan pembuktian secara kontradiksi, tunjukkan bahwa sedikitnya ada 4 hari yang sama dari 22 hari sebarang yg dipilih.
12. Dengan pembuktian secara kontradiksi, tunjukkan bahwa jika 3n+2 ganjil maka n ganjil.
13. Dengan menggunakan Pembuktian Counterexample, tunjukkan bhw “setiap bilangan bulat positif adalah hasil tambah dari tiga bilangan kuadrat” adalah salah.

Bab 6

Induksi Matematis

POKOK BAHASAN:

- Induksi Matematika
- Induksi Kuat
- Definisi Matematika untuk Rekursif
- Himpunan yang didefinisikan secara rekursif

TUJUAN BELAJAR:

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Mengidentifikasi perbedaan antara induksi matematika dan induksi kuat dan memberikan contoh yang sesuai untuk digunakan masing-masing.
2. Menghubungkan ide dari induksi matematika untuk rekursi dan struktur yang didefinisikan secara rekursif.

6.1 Induksi Matematika

Berapakah jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama?

1 = 1

1 + 3 = 4

1 + 3 + 5 = 9

1 + 3 + 5 + 7 = 16

1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25

Tebakan:

"Jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama adalah n2."

Metoda apa yang dapat dipakai untuk membuktikan bahwa tebakan ini benar, jika memang pada kenyataannya benar?

Induksi matematika merupakan teknik pembuktian yang sangat penting. Teknik ini dipergunakan secara luas untuk membuktikan pernyataan yang berkaitan dengan obyek diskrit (kompleksitas algoritma, teorema mengenai graf, identitas dan ketidaksamaan yang melibatkan bilangan bulat, dsb). Teknik ini tidak dapat digunakan untuk menemukan rumus atau teorema, tetapi hanya untuk melakukan pembuktian.

Ilustrasi dari induksi matematika ini adalah :

- Sederetan orang menyebarkan suatu rahasia.
- Domino

Teknik untuk membuktikan proposisi dalam bentuk $\forall$n P(n), dengan semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan bulat positif.

Suatu bukti dengan menggunakan induksi matematika bahwa “P(n) benar untuk setiap n bilangan bulat positif “ terdiri dari tiga langkah:

1. Langkah basis:
   Tunjukkan bahwa P(1) benar.
2. Langkah induktif:
   Tunjukkan bahwa dengan P(k), maka P(k + 1) benar untuk setiap k.
   P(k) untuk suatu k tertentu disebut hipotesa induksi.
3. Konklusi: $\forall$n P(n) bernilai benar.

Contoh 1 : “Jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.”

Bukti:

Misalkan P(n): proposisi “Jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.”

1. Langkah basis:
   P(1) benar, karena $1 = 1^2$.
2. Langkah induktif:
   Asumsikan bahwa P(k) benar untuk semua k, yaitu
   $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$.
   Kita perlu menunjukkan bahwa P(k + 1) benar, yaitu
   $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2$.

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + (2k+1)$

$= (k+1)^2$

3.Konklusi: Jumlah n bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Contoh 2 : $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$

Bukti:

Misalkan P(n): proposisi $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$

1.Langkah basis:

Untuk n = 0 diperoleh peroleh 0 = 0. Jadi, P(0) benar.

2.Langkah induktif:

Asumsikan bahwa P(k) benar untuk semua k, yaitu

$$1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$$

Akan ditunjukkan bahwa P(k + 1) benar, yaitu

$$1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = (k + 1)((k + 1) + 1)/2$$

Dari $1 + 2 + \ldots + k = k(k + 1)/2$, diperoleh

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) &= k(k + 1)/2 + (k + 1) \\ &= (2k + 2 + k(k + 1))/2 \\ &= (2k + 2 + k2 + k)/2 \\ &= (2 + 3k + k2)/2 \\ &= (k + 1)(k + 2)/2 \\ &= (k + 1)((k + 1) + 1)/2 \end{aligned}$$

3.Konklusi: $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$.

6.2 Induksi Kuat

Terdapat bentuk lain dari induksi matematika yang sering dipergunakan dalam bukti. Teknik ini dinamakan Induksi Kuat atau Prinsip kedua dari induksi matematika

Langkah-langkah dalam induksi kuat ini adalah sbb:

1.Langkah basis:

Tunjukkan bahwa P(0) benar.

2.Langkah induktif:

Tunjukkan bahwa jika P(0) dan P(1) dan … dan P(k) benar, maka P(k + 1) untuk setiap $k \in N$.

3.Konklusi: $\forall n$ P(n) bernilai benar.

Contoh 1: Tunjukkan bahwa setiap bilangan bulat yang lebih besar dari 1 dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima.

Solusi:

P(n): proposisi "setiap bilangan bulat yang lebih besar dari 1 dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima".

1. **Langkah basis**:

   P(2) benar, karena 2 adalah hasil kali dari satu bilangan prima, dirinya sendiri.

2. **Langkah induktif:**

   Asumsikan P(j) benar untuk semua bilangan bulat j, 1 < j″k.

   Harus ditunjukkan bahwa P(k+1) juga benar.

   Ada dua kasus yang mungkin:

   a. Jika (k + 1) bilangan prima, maka jelas P(k + 1) benar.
   b. Jika (k + 1) bilangan komposit, (k+1) dapat ditulis sebagai perkalian dua buah bilangan bulat a dan b sehingga $2 \le a \le b < k + 1$.

   Oleh *hipotesa induksi*, a dan b keduanya dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan prima. Jadi, $k + 1 = a \cdot b$ dapat ditulis sebagai hasil kali bilangan prima.

3. **Konklusi:**

   "Setiap bilangan bulat yang lebih besar dari 1 dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima".

6.3 Definisi Matematika untuk Rekursif

Ada kalanya kita mengalami kesulitan untuk mendefinisikan suatu obyek secara eksplisit. Mungkin lebih mudah untuk mendefinisikan obyek tersebut dengan menggunakan dirinya sendiri. Ini dinamakan sebagai proses rekursif.

Kita dapat mendefinikan barisan, fungsi dan himpunan secara rekursif.

Sebagai contoh adalah : Barisan bilangan pangkat dari 2

$a_n = 2^n$ untuk n = 0, 1, 2, … .

Barisan ini dapat didefinisikan secara rekursif:

$a_0 = 1$

$a_{n+1} = 2an$ untuk n = 0, 1, 2, …

Langkah-langkah untuk mendefinisikan barisan secara rekursif:

1. **Langkah basis:** Spesifikasi anggota awal.
2. **Langkah rekursif:** Berikan aturan untuk membangun anggota baru dari anggota yang telah ada.

6.3.1 Fungsi yang Didefinisikan Secara Rekursif

Langkah-langkah untuk mendefinisikan fungsi dengan domain bilangan cacah:

1. Langkah basis: Definisikan nilai fungsi pada saat nol.
2. Langkah rekursif: Berikan aturan untuk mencari nilai fungsi untuk setiap bilangan bulat berdasarkan nilai fungsi pada bilangan bulat yang lebih kecil.

Definisi seperti itu disebut **rekursif** atau definisi **induktif**.

Contoh:

$f(0) = 3$

$f(n + 1) = 2f(n) + 3$

Maka

$f(0) = 3$

$f(1) = 2f(0) + 3 = 2\cdot3 + 3 = 9$

$f(2) = 2f(1) + 3 = 2\cdot9 + 3 = 21$

$f(3) = 2f(2) + 3 = 2\cdot21 + 3 = 45$

$f(4) = 2f(3) + 3 = 2\cdot45 + 3 = 93$

6.4 Himpunan yang Didefinisikan Secara Rekursif

Langkah-langkah dalam mendefinisikan suatu himpunan secara rekursif:

1. Langkah basis:

   Spesifikasi koleksi awal dari anggota

2. Langkah rekursif:

   Mendefinisikan aturan konstruksi anggota baru dari anggota yang telah diketahui

Contoh: Misalkan S didefinisikan secara rekursif oleh:

$$3 \in S$$

$$(x+y) \in S \text{ jika } x \in S \text{ dan } y \in S$$

Maka S adalah himpunan bilangan bulat positif yang habis dibagi 3.

Bukti:

Misalkan A himpunan yang beranggotakan semua bilangan bulat positif yang habis dibagi 3.

Untuk membuktikan bahwa A = S, harus ditunjukkan $A \subseteq S$ and $S \subseteq A$.

Bagian I: Akan dibuktikan $A \subseteq S$, yaitu menunjukkan bahwa setiap bilangan bulat positif yang habis dibagi 3 ada di S (dengan menggunakan induksi matematika).

Misalkan P(n): proposisi "3n anggota S".

1. Langkah basis: P(1) benar, karena $3 \in S$.
2. Langkah induktif:

   Asumsikan P(k) benar, yaitu $3k \in S$.

   Akan ditunjukkan P(k+1) juga benar, yaitu

   $3(k+1) \in S$

   Karena $3k \in S$ dan $3 \in S$, berdasarkan definisi rekursif dari S, $3k+3 = 3(k+1)$ juga ada di S.

3. Konklusi:

   Jadi, setiap bilangan bulat positif yang habis dibagi 3 ada di S.

Kesimpulan dari bagian I adalah $A \subseteq S$.

Bagian II: Akan ditunjukkan $S \subseteq A$ dengan menggunakan definisi rekursif dari S.

Langkah basis:

Akan ditunjukkan setiap anggota awal S ada di A.

Karena 3 habis dibagi 3 maka $3 \in A$.

Langkah rekursif:

Akan ditunjukkan bahwa setiap bilangan bulat yang dibangun dengan mengunakan langkah rekursif juga merupakan anggota A, yaitu

$(x+y) \in A$ jika $x,y \in S$ (yang diasumsikan $\in A$).

Jika x dan y keduanya di A, maka 3 | x dan 3 | y. Akibatnya, 3 | (x + y).

Kesimpulan dari bagian II adalah $S \subseteq A$.

Jadi, secara keseluruhan, berlaku A = S.

6.5 Ringkasan

- ✓ Mengapa Induksi Matematika suatu teknik pembuktian yang valid? Validitas dari induksi matematika dapat diturunkan dari suatu aksioma fundamental tentang himpunan bilangan bulat.
- ✓ Setiap himpunan bilangan bulat positif yang tak kosong selalu memiliki anggota terkecil. Misalkan kita tahu bahwa P(1) benar dan P(k) P(k + 1) juga benar untuk semua k bilangan bulat positif.

6.6 Latihan Soal

1. Dengan induksi matematika, tunjukkan bahwa $n < 2^n$ untuk setiap bilangan bulat positif n.
2. Dalam suatu permainan, dua orang pemain secara bergantian mengambil sejumlah korek api dari salah satu dari dua tumpukan korek api.

   Pemain yang mengambil korek api terakhir yang menang.

Tunjukkan bahwa jika kedua tumpukan korek api memuat korek api dalam jumlah yang sama, pemain kedua selalu dapat menjadi pemenang.

3. Berikan definisi rekursif dari $a_n=r^n$, dengan $r \in N$, $r \neq 0$ dan n bilangan bulat positif.
4. Definisikan secara rekursif untuk deret bilangan 2^n

Bab 7

Teori Dasar Counting

POKOK BAHASAN:

- Argumen Counting
    - Aturan Perkalian dan Penjumlahan
    - Prinsip Inklusi-Eksklusi
- Prinsip *Pigeonhole* (Sarang Merpati)

TUJUAN BELAJAR:

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Memahami aturan perkalian, aturan penjumlahan dan implementasinya dalam Aplikasi tertentu.
2. Memahami teori pigeonhole dan implementasinya dalam Aplikasi tertentu.
3. State the definition of the Master theorem.

7.1 Argumen Counting

Kombinatorial adalah cabang matematika yang mempelajari pengaturan obyek-obyek. Solusi yang ingin diperoleh dengan kombinatorial adalah jumlah bara pengaturan obyek-obyek tertentu di dalam kumpulannya. Berikut ini contoh masalah yang dipecahkan dengan kombinatorial.

i. Contoh pertama, misalkan nomor plat mobil di negara X terdiri atas 5 digit angka diikuti dengan 2 huruf. Angka pertama tidak boleh 0. Berapa banyak nomor plat mobil yang dapat dibuat?

ii. Contoh kedua, password sistem komputer panjangnya enam sampai delapan karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka: huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak password yang dapat dibuat?

7.2 Aturan Penjumlahan dan Perkalian

7.2.1 Aturan Penjumlahan

Jika suatu pekerjaan dapat dilaksanakan dengan n1 cara dan pekerjaan kedua dengan n2 cara; serta jika kedua tugas ini tidak dapat dilakukan dalam waktu yang bersamaan, maka terdapat n1 + n2 cara untuk melakukan salah satu pekerjaan tersebut.

Contoh:

Departemen Matematika akan menghadiahkan sebuah komputer kepada seorang mahasiswa atau seorang dosen.

Ada berapa memberi hadiah, jika terdapat 532 mahasiswa dan 54 dosen?

Terdapat 532 + 54 = 586 cara.

7.2.2 Generalisasi Aturan Penjumlahan

Jika terdapat pekerjaan-pekerjaan T1, T2, …, Tm yang dapat dilakukan dalam n1, n2, …, nm cara, dan tidak ada dua di antara pekerjaan-pekerjaan tersebut yang dapat dilakukan dalam waktu yang bersamaan, maka terdapat n1 + n2 + … + nm cara untuk melakukan salah satu dari tugas-tugas tersebut.

Contoh:

Seorang mahasiswa dapat memilih satu tugas proyek Matematika Diskrit dari tiga buah daftar, yang masing-masing berisikan 9, 21, dan 17 proyek. Ada berapa tugas proyek yang dapat dipilih?

7.2.3 Aturan Perkalian

Misalkan suatu prosedur dapat dibagi menjadi dua pekerjaan yang berurutan. Jika terdapat n1 cara untuk melakukan tugas pertama dan n2 cara untuk melakukan tugas kedua setelah tugas pertama selesai dilakukan, maka terdapat n1 · n2 cara untuk melakukan prosedur tersebut.

7.2.4 Generalisasi Aturan Perkalian

Jika suatu prosedur terdiri dari barisan tugas-tugas T1, T2, …, Tm yang dapat dilakukan dalam n1, n2, …, nm cara, secara berurutan, maka terdapat n1 · n2 · … · nm cara untuk melaksanakan prosedur tersebut.

Contoh:
Berapa banyak plat nomor kendaraan yang berbeda yang memuat tepat satu huruf, tiga digit bilangan desimal, dan dua huruf?

Solusi:
Terdapat 26 kemungkinan untuk memilih huruf pertama, then 10 kemungkinan untuk menentukan digit pertama, 10 untuk digit kedua, dan juga 10 untuk digit ketiga, kemudian 26 kemungkinan untuk memilih huruf kedua dan 26 untuk huruf ketiga.

Jadi, terdapat 26 · 10 · 10 · 10 · 26 · 26 = 17576000 plat nomor kendaraan yang berbeda.

7.3 Prinsip Inklusi Eksklusi

Contoh penggunaan prinsip inklusi-eksklusi dalam permasalahan kombinatorial adalah sebagai berikut:
Seperti kita ketahui informasi yang dapat disimpan dalam memori komputer adalah byte. Setiap byte disusun oleh 8-bit. Berapa banyak jumlah byte yang dapat dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '11'? Penyelesaiannya adalah sebagai berikut:
Misalkan
A = himpunan byte yang dimulai dengan '11'
B = himpunan byte yang diakhiri dengan '11'
$A \cap B$ = himpunan byte yang berawal dan berakhir dengan '11'
$A \cup B$ = himpunan byte yang berawal dengan '11' atau berakhir dengan '11'

Jumlah byte yang dimulai dengan '11' adalah 2^6 = 64 buah, karena 2 posisi pertama sudah diisi dengan '11', sehingga kita cukup mengisi posisi bit sisanya. Jadi $|A|$ = 64. Dengan cara yang sama, jumlah byte yang diakhiti dengan '11' adalah 2^6 = 64 buah. Jadi $|B|$ = 64.

Jumlah byte yang berawal dan berakhir dengan ’11’ ada $2^4 = 16$ buah, karena 2 posisi pertama dan 2 posisi terakhir sudah diisi dengan ’11’ sehingga kita tinggal mengisi 4 posisi bit di tengah-tengah saja. Jadi, $|A \cap B| = 16$.

Karena terdapat 64 cara untuk menyelesaikan Pekerjaan 1 dan 64 cara untuk menyelesaikan Pekerjaan 2, dan dalam 16 dari kasus-kasus tersebut Pekerjaan 1 dan 2 diselesaikan pada saat yang bersamaan, maka terdapat 64 + 64 – 16 = 112 cara untuk melakukan salah satu di antara kedua Tugas tersebut.

Dalam teori bilangan, ini berkorespondensi dengan himpunan A dan B yang tidak saling lepas. Maka: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Ini disebut prinsip inklusi-eksklusi.

Untuk tiga himpunan A, B dan C berlaku :

$$| A \cup B \cup C | = | A | + | B | + | C | - | A \cap B | - | A \cap C | - | B \cap C | + | A \cap B \cap C |$$

7.4 Prinsip Pigeonhole (Sarang Merpati)

Beberapa teori kombinasi didapatkan dari pernyataan-pernyataan seperti Prinsip Pigeonhole (Sarang Merpati). Prinsip tersebut berbunyi : Jika (k + 1) atau lebih merpati ditempatkan ke dalam k sarang, maka terdapat paling sedikit satu sarang yang memuat dua atau lebih merpati.

Prinsip ini dapat diterapkan pada berbagai permasalahan seperti di bawah ini:

Contoh :

1. Jika dalam satu kelas terdapat 13 mahasiswa (merpati), maka sedikitnya terdapat 2 mahasiswa yang lahir pada bulan yang sama (sarang merpati).
2. Jika terdapat 11 pemain dalam sebuah tim sepakbola yang menang dengan angka 12-0, maka haruslah terdapat paling sedikit satu pemain dalam tim yang membuat gol paling sedikit dua kali.
3. Jika anda menghadiri 6 kuliah dalam selang waktu Senin sampai Jumat, maka haruslah terdapat paling sedikit satu hari ketika anda menghadiri paling sedikit dua kelas.
4. Jika dalam sebuah tas laundry terdapat kaos kaki dengan warna merah, putih, dan biru. Berapa pasang kaos kaki yang warnanya sama dalam satu tas yang berisi 4 kaos kaki.

   Jawab : 1 pasang

7.4.1 GENERALISASI PRINSIP SARANG MERPATI

Perluasan prinsip sarang merpati adalah sebagai berikut : Jika n sarang merpati ditempati oleh kn + 1 atau lebih merpati, dimana k adalah bilangan positif integer, maka dalam 1 sarang sedikitnya ditempati oleh k + 1 atau lebih merpati.

Contoh :

1. Di dalam kelas dengan 60 mahasiswa, terdapat paling sedikit 12 mahasiswa akan mendapat nilai yang sama (A, B, C, D, atau E).
2. Di dalam kelas dengan 61 mahasiswa, paling sedikit 13 mahasiswa akan memperoleh nilai yang sama.

Contoh Soal :

1. Misalkan ada laci yang berisi selusin kaus kaki coklat dan selusin kaus kaki hitam yang didistribusikan secara acak. Pada saat listrik padam, berapa kaus kaki yang harus anda ambil untuk memastikan bahwa di antaranya terdapat sepasang kaus yang sewarna?

Solusi:

Terdapat dua tipe kaus kaki, jadi jika anda memilih paling sedikit 3 kaus kaki, haruslah terdapat paling sedikit dua kaus kaki coklat atau paling sedikit dua kaus kaki hitam .

Generalisasi Prinsip Sarang Merpati : $\lceil 3/2 \rceil = 2$.

7.5 Ringkasan

- ✓ Jika beberapa pekerjaan tidak dapat dilakukan dalam waktu bersamaan, maka untuk menghitung berapa banyak cara untuk melakukan salah satu pekerjaan adalah dengan menggunakan aturan penjumlahan.
- ✓ Jika beberapa pekerjaan harus dilakukan dalam waktu bersamaan, maka untuk menghitung berapa banyak cara untuk melakukan salah satu pekerjaan adalah dengan menggunakan aturan perkalian.
- ✓ Prinsip Inklusi Eksklusi juga dapat digunakan dalam teori counting.

7.6 Latihan Soal

1. Sebuah restoran menyediakan lima jenis makanan, misalnya rawon, soto, mi, nasi campur dan bakso serta tiga jenis minuman misalnya es degan, es jeruk, teh anget. Jika setiap orang boleh memesan satu makanan dan satu minuman, berapa kemungkinan makanan dan minuman yang dapat dipesan?
2. Jabatan ketua himpunan dapat dipegang oleh mahasiswa D4 angkatan 2003 atau mahasiswa D3 angkatan 2004. Jika terdapat 23 mahasiswa D4 angkatan 2003 dan 58 mahasiswa D3 angkatan 2004, berapa cara memilih ketua himpunan?
3. Sekelompok mahasiswa terdiri dari 4 orang pria dan 3 orang wanita. Berapa jumlah cara memilih satu orang wakil pria dan satu orang wakil wanita?
4. Berapa cara memilih satu orang yang mewakili kelompok tersebut (tidak peduli pria atau wanita)?
5. Perpustakaan memiliki 6 buah buku berbahasa Inggris, 8 buah buku berbahasa Perancis dan 10 buah buku berbahasa Jerman. Masing-masing buku berbeda judulnya. Berapa jumlah cara memilih (a) 3 buah buku, masing-masing dengan 3 bahasa berbeda, dan (b) 1 buah buku (sembarang bahasa).
6. Huruf ABCDE akan digunakan untuk membuat kata dengan panjang 3 karakter. Untuk itu jawablah berapa kata yang dapat terbentuk jika :
   a. Dalam kata diperbolehkan ada pengulangan huruf.
   b. Dalam kata tidak diperbolehkan adanya pengulangan huruf.
   c. Kata dimulai dari huruf A dan diperbolehkan adanya pengulangan.
   d. Kata dimulai dari huruf A dan tidak diperbolehkan adanya pengulangan.
   e. Kata tidak mengandung huruf A dan diperbolehkan adanya pengulangan.
   f. Kata tidak mengandung huruf A dan tidak diperbolehkan adanya pengulangan.
7. Berapa nilai k sesudah pseudocode berikut dijalankan

```
k ← 0
for p1 ← 1 to n1 do
    k ← k + 1
```

```
for p2 ← 1 to n2 do
    k ← k + 1
.
.
.
for pm ← 1 to nm do
    k ← k + 1
```

8. Berapa nilai k sesudah pseudocode berikut dijalankan

```
k ← 0
for p1 ← 1 to n1 do
    for p2 ← 1 to n2 do
.
.
.
for pm ← 1 to nm do
                k ← k + 1
```

9. Sebuah plat nomer di suatu negara terdiri dari dua huruf dan tiga angka dengan ketentuan angka pertama tidak boleh 0. Hitung berapa cara bisa dilakukan untuk menuliskan plat nomer!
10. Pada tahun 1990, terdapat sebuah virus yang namanya Melissa. Virus ini bekerja melalui sebuah pesan e-mail yang berisi file attach word processor document. Setelah dari satu e-mail ini virus akan menyebar ke komputer yang digunakan untuk mengakses 50 alamat e-mail lain yang berada pada address book sebelumnya. Setalah 4 iterasi berapa jumlah komputer yang terkena virus ini?
11. Berapa string yang dapat dibuat dengan panjang 4 karakter yang terdiri dari huruf ABCDE jika pengulangan tidak diperbolehkan.
12. Berapa string yang dapat dibuat dari soal di atas jika string dimulai dengan huruf B.
13. Berapa string yang dapat dibuat dari soal no 10 jika string tidak dimulai dengan huruf B.

14. Untuk soal no 13-15, terdapat 10 jalan untuk perjalanan dari Surabaya ke Yogyakarta dan terdapat 5 jalan untuk perjalanan dari Yogyakarta ke Jakarta. Terdapat berapa jalan untuk melakukan perjalanan dari Surabaya ke Jakarta melalui Yogyakarta.
15. Terdapat berapa jalan yang dapat dipilih untuk melakukan perjalanan dari Surabaya – Yogyakarta – Jakarta –Yogyakarta – Surabaya.
16. Terdapat berapa jalan yang dapat dipilih untuk melakukan perjalanan dari Surabaya – Yogyakarta – Jakarta –Yogyakarta – Surabaya, tidak boleh melalui jalan yang sama untuk perjalanan berangkat dan pulang.
17. 19 orang mempunyai first name Ahmad, Arfan, dan Farah; middle name Adibah dan Abdul; dan last name Hakim, Rohman dan Rahmawati. Berapa minimal jumlah orang yang mempunyai first, middle dan last name yang sama. Buktikan jawaban anda!
18. Dalam berapa cara kita dapat memilih pimpinan, wakil pimpinan, sekretaris, bendahara dari sebuah organisasi yang mempunyai calon untuk ke-4 jabatan tsb. sebanyak 10 orang.
19. Berapa banyak string yang dapat dibentuk yang terdiri dari 4 huruf berbeda dan diikuti dengan 3 angka yang berbeda pula?
20. Berapa jumlah kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka :1,2,3,4,5 jika:
    a. Tidak boleh ada pengulangan angka.
    b. Boleh ada pengulangan angka

Bab 8

Teori Counting Lanjut

POKOK BAHASAN:

- Permutasi dan Kombinasi
  - Permutasi
  - Permutasi dengan Pengulangan
  - Kombinasi
  - Kombinasi dengan Pengulangan
- Relasi recurrence
  - Definisi
  - The Master theorem

TUJUAN BELAJAR:

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Dapat membedakan penggunaan permutasi dan kombinasi dalam menyelesaikan permasalahan counting.
2. Menyelesaikan bermacam permasalahan recurrence.
3. Menganalisa sebuah permasalahan counting untuk mengidentifikasi rumus recurrence yang sesuai.

8.1 Permutasi dan Kombinasi

8.1.1 Permutasi

Sebuah himpunan yang terdiri dari n obyek mempunyai susunan dengan urutan berbeda. Hal ini dinamakan permutasi dari obyek tersebut. Dengan kata lain permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan obyek-obyek.

Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi aturan perkalian. Misalkan jumlah obyek adlah n, maka urutan pertama dipilih dari n obyek, urutan kedua dipilih dari n – 1 obyek, urutan ketiga dipilih dari n – 2 obyek begitu seterusnya dan urutan terakhir dipilih dari 1 obyek yang tersisa. Menurut kaidah perkalian, permutasi dari n obyek adalah:

$n(n-1)(n-2) \ldots (2)(1) = n!$ ....(8.1)

Misalkan ada tiga buah bola yang berbeda warnanya, yaitu merah (m), biru (b), dab putih (p). Kita akan memasukkan ketiga buah bola itu ke dalam tiga buah kotak, masing-masing kotak 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Penyelesaian:

Misalkan urutan itu kita simbolkan xyz. Urutan pertama (x) mungkin ditempati oleh salah satu dari 3 buah bola, urutan kedua (y) mungkin ditempati oleh salah satu dari 2 buah bola (karena 1 bola lagi sudah dipakai untuk X), dan urutan ketiga (z) ditempati oleh 1 buah bola yang tersisa, sehingga jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah $(3)(2)(1) = 3! = 6$.

Sekarang misalkan ada enam buah bola yang berbeda warnanya, yaitu merah(m), biru (b), putih (p), hijau (h), kuning (k) dan jingga (j). Kita akan memasukkan keenam buah bola itu ke dalam tiga buah kotak masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Perhitungannya adalah sebagai berikut:

Kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (ada 6 pilihan).

Kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan).

Kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan).

Menurut kaidah perkalian, jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = $(6)(5)(4)$ = 120 buah.

Permutasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan urutan r buah elemen yang dipilih dari n buah elemen, dengan $r <= n$, yang dalam hal ini pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.Jumlah susunan berbeda dari pemilihan r obyek yang diambil dari n obyek disebut permutasi-r, dilambangkan dengan $P(n,r)$, yaitu

$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1)) = n!/(n-r)!$ ....(8.2)

Perhatikan bahwa bila r = n, maka persamaan 8.2 menjadi sama dengan 8.1, yaitu:

P(n,n)=n!/(n-n)! = n!/0! = n!/1 = n! ....(8.3)

8.1.2 Kombinasi

Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi urutan kemunculan diabaikan. Urutan acb, bca, dan acb dianggap sama dan dihitung sekali.

Kombinasi r elemen dari n elemen adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen

C(n,r) = P(n,r)/P(r,r) = (n!/(n-r)!)/r!(r-r)! = n!/r!(n-r)!

Persoalan kombinasi dapat dipandang sebagai cara memilih r buah elemen dari n buah elemen yang ada, tetapi urutan elemen di dalam susunan hasil pemilihan tidak penting. Sebagai contoh, misalkan sebuah klub memiliki 25 orang anggota. Kita akan memilih lima orang sebagai panitia. Panitia adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama. Misalkan jika adal lima otang yang dipilih A,B,C,D,E maka urutan penempatan masing-masing di dalam panitia tidak penting. (ABCDE sama dengan BACED, ADCEB dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah C(25,5) = 53130 cara.

8.2 Relasi *Recurrence* (Relasi yang Berulang)

Banyak problem counting yang tidak dapat dipecahkan dengan menggunakan hanya aturan dasar, kombinasi, permutasi, dan aturan sarang merpati. Misalnya:

Ada berapa banyak string biner dengan panjang n yang tidak memuat 2 angka nol berurutan?

Perhatikan perintah di bawah ini untuk membangkitkan sebuah deret:

1. Dimulai dengan 5.
2. Diberikan hubungan dengan menambahkan 3 dengan bilangan sebelumnya untuk bilangan berikutnya.

Jika kita mendaftar isi dari deret tersebut adalah:

5, 8, 11, 14, 17, ... (8.4)

Angka pertama 5 dikarenakan perintah 1. Angka kedua adalah 8 dikarenakan perintah kedua mengatakan tambahkan 3 dengan bilangan sebelumnya (5) untuk mendapatkan bilangan berikutnya (8). Bilangan ketiga adalah 11 dikarenakan perintah kedua mengatakan tambahkan 3 dengan bilangan sebelumnya (8) untuk mendapatkan bilangan berikutnya (11). Begitu seterusnya, dengan mengikuti perintah 1 dan 2 kita dapat menghitung bilangan-bilangan yang terdapat dalam deret tersebut.

Perintah 1 dan 2 tidak dengan jelas memberikan rumus untuk bilangan ke-n dari deret, akan tetapi dengan menghitung bilangan demi bilangan sebelumnya kita dapat menghitung sebuah bilangan dalam deret tersebut.

Jika kita menunjukkan deret pada 8.4 sebagai a_1, a_2, ... kita dapat mengatakan dengan cara lain untuk perintah pertama adalah:

$$a_1 = 5 \tag{8.5}$$

dan kita dapat mengatakan dengan cara lain untuk perintah kedua adalah:

$$a_n = a_{n-1} + 3,\ n \geq 2 \tag{8.6}$$

dengan mengambil n = 2 dalam 4.4.3 kita dapat memperoleh

$$a_2 = a_1 + 3$$

dengan 4.4.2 $a_1 = 5$, sehingga

$$a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

dengan mengambil n = 3 dalam 4.4.3 kita dapat memperoleh

$$a_3 = a_2 + 3$$

jika $a_2 = 8$, sehingga

$$a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$$

Menggunakan rumus 8.5 dan 8.6 kita dapat menghitung bilangan dalam deret tersebut dengan mengacu pada perintah 1 dan 2. Dan kita juga dapat melihat bahwa 8.5 dan 8.6 sama dengan perintah 1 dan 2.

Rumus 8.6 merupakan sebuah contoh dari relasi recurrence (relasi yang berulang). Sebuah relasi recurrence mendefinisikan sebuah deret dengan nilai ke-n didefinisikan dari nilai sebelumnya. Untuk keperluan relasi recurrence seperti 8.6 maka sebuah nilai awal seperti 8.5 harus diberikan. Nilai awal ini dinamakan *initial conditions* (kondisi pendahulu).

8.2.1 Definisi

Relasi *Recurrence* untuk deret a_0, a_1, ... adalah rumus yang menhubungkan antara a_n dengan bilangan sebelumnya a_0, a_1, ... , a_{n-1}. Kondisi pendahulu untuk deret a_0, a_1 ... secara jelas harus diberikan untuk batas dari deret bilangan.

Contoh 1 :

$\{a_n\}$ barisan yang memenuhi

$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ untuk n = 2,3, 4, ….

dan misalkan pula $a_0 = 2$ dan $a_1 = 9$. Tentukan a_2 dan a_4!

Solusi :

$a_2 = a_1 - a_0 = 9 - 2 = 7$.

Sedangkan utk mencari a_4 dicari lebih dahulu a_3.

$a_3 = a_2 - a_1 = 7 - 9 = -2$.

Jadi, $a_4 = a_3 - a_2 = -2 - 7 = -9$.

Contoh 2 :

Apakah barisan $\{a_n\}$ dimana $a_n=3n$, dengan n bilangan bulat non-negatif, merupakan solusi dari $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ untuk n = 2, 3, 4, …

Bagaimana dengan barisan $a_n = 2n$ dan $a_n =5$?

Solusi :

- $2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)] - 3(n-2) = 6n - 6 - 3n + 6 = 3n = a_n$.
  Jadi {3n} solusi dari relasi recurrence tsb.
- Misal $a_n = 2n$. Maka, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, dan $a_2 = 4$. Karena $2a_1 - a_0 = 2\cdot 2 - 1 = 3 \neq a_2$, maka $a_n = 2n$ bukan solusi.
- Misal $a_n = 5$, $2a_{n-1} - a_{n-2} = 2\cdot 5 - 5 = 5 = a_n$.
  Jadi $a_n = 5$ adalah solusi.

Contoh 3 : Kelinci & Bilangan Fibonacci

Sepasang kelinci ditaruh di suatu pulau. Pasangan kelinci ini tidak akan beranak sampai berumur 2 bulan. Setelah berumur 2 bulan, setiap sepasang menghasilkan sepasang yg lain setiap bulannya. Tentukan relasi *recurrence* dari jumlah pasangan setelah n bulan, bila tidak ada kelinci yg mati.

Solusi :

Misalkan fn: jumlah pasangan kelinci setelah n bulan.

Maka, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$.

Untuk mencari f_n, tambahkan jumlah pasangan pada bulan sebelumnya, f_{n-1}, dengan jumlah pasangan yang baru lahir, f_{n-2}.

Jadi, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Contoh 4 :

Ada berapa banyak string biner dengan panjang n yang tidak memuat 2 angka nol berurutan?

Solusi :

Misalkan a_n: banyaknya string biner panjang n yang tidak memuat 2 angka nol berturutan.

Perhatikan setiap string biner panjang n yang tidak memuat 2 angka nol berurutan sama dengan:

Yg berakhiran 1:	String biner panjang n-1 tanpa 2 angka nol berurutan	1	a_{n-1}
Yg berakhiran 0:	String biner panjang n-2 tanpa 2 angka nol berurutan	1 0	a_{n-2}
		Total:	$a_n= a_{n-1}+a_{n-2}$

Jadi, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$,

dengan $a_1 = 2$ dan $a_2= 3$.

Barisan $\{a_n\}$ memenuhi relasi *recurrence* yang sama dengan bilangan Fibonacci.

Karena $a_1 = f_3$ dan $a_2 = f_4$ maka $a_n = f_{n+2}$.

8.2.2 Bagaimana Menyelesaikan Relasi Recurrence

Untuk beberapa permasalahan kita harus menyelesaikan relasi recurrence hingga menjadi satu rumus yang jelas.

Contoh 1:

- $M(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ M(n-1)+1 & \text{if } n > 0 \end{cases}$
- $M(n) = M(n-1) + 1$

$$\begin{aligned} &= M(n-2) + 1 + 1 = M(n-2) + 2 \\ &= M(n-3) + 1 + 2 = M(n-3) + 3 \\ & M(n-i) + i \\ &= M(n-n) + n \\ &= M(0) + n = 0 + n = n \end{aligned}$$

Contoh 2:

- $A(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 1 \\ A(\lfloor n/2 \rfloor)+1 & \text{if } n > 1 \end{cases}$
- $A(n) = A(2^k)$

$$\begin{aligned} &= A(2^{k-1}) + 1 \\ &= A(2^{k-2}) + 1 + 1 = A(2^{k-2}) + 2 \\ & A(2^{k-i}) + i \\ &= A(2^{k-k}) + k \\ &= A(2^0) + k = A(1) + k = 0 + k = k \end{aligned}$$

$n = 2^k \rightarrow k = {}^2\log n$

- $A(n) = {}^2\log n$

8.3 Ringkasan

✓ Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan obyek-obyek, menggunakan rumus n!/(n-r)!

- ✓ Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi urutan kemunculan diabaikan. Rumus dari kombinasi adalah n!/r!(n-r)!
- ✓ Terdapat dua syarat dalam penggunaan relasi recurrence : initial condition, pengulangan relasi.

8.4 Latihan Soal

1. Berapa jumlah himpunan bagian dari himpunan B = {1, 2, ..., 10} yang mempunyai anggota paling sedikit enam?
2. Seseorang mempunyai 10 kawan. Dalam berapa banyak cara dia dapat pergi makan ke restoran dengan dua atau lebih kawannya?
3. Sebuah pesan kawat dibentuk dari rangkaian lima garis putus-putus (dash) dan tiga buah titik (dot). Berapa banyak pesan dapat dibentuk?
4. Lima belas pemain basket akan direkrut oleh tiga tim profesional di Bandung, Jakarta, dan Surabaya, sedemikian sehingga setiap tim akan merekrut lima pemain. Dalam berapa banyak cara ini dapat dilakukan?
5. Berapa banyak cara 2n orang dapat dibagi menjadi n pasangan?
6. Dalam berapa cara kita dapat memilih pimpinan, wakil pimpinan, sekretaris, bendahara dari sebuah organisasi yang mempunyai calon untuk ke-4 jabatan tsb. sebanyak 10 orang.
7. Berapa banyak cara menyusun menu nasi goreng tiga kali seminggu untuk sarapan pagi?
8. Ada berapa cara kita dapat memilih 3 dari 4 elemen himpunan A = {a,b,c,d}?
9. Ada berapa deret biner yang terdiri dari 8 bit yang berisi 4 buah angka 1?
10. Setiap pengguna suatu sistem komputer memiliki sebuah *password*, yang terdiri dari 6 sampai 8 karakter, dengan setiap karakter adalah huruf kapital atau digit bilangan desimal. Ada berapa banyak *password* yang mungkin?
11. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat n terdapat kelipatan dari n yang hanya terdiri dari digit 0 atau 1 saja.
12. Berapa jumlah minimum mahasiswa yang dibutuhkan di dalam kelas Matematika Diskrit agar sedikitnya 6 orang memperoleh nilai yang sama?

13. Jika terdapat 32 orang yang menyimpan kertas atau botol untuk didaur ulang, 30 menyimpan kertas dan 14 menyimpan botol. Tentukan jumlah orang yang
    a. Menyimpan keduanya.
    b. Menyimpan kertas saja.
    c. Menyimpan botol saja.
14. Jika seseorang sedang berinvestasi 2 juta rupiah dan mendapat keuntungan tetap setiap tahunnya sebanyak 14%. Jika A_n adalah jumlah uangnya setelah n tahun, jawab pertanyaan di bawah ini:
    a. Tentukan relasi recurrence untuk A_0, A_1, ...
    b. Tentukan initial condition untuk A_0
    c. Tentukan A_1, A_2, A_3
    d. Tentukan rumus explisit untuk A_n
    e. Setelah berapa tahun investasinya akan berubah minimal menjadi 2 kali lipat.
15. Jika S_1, S_2, S_3, S_4, ... adalah angka dari n bit string yang tidak berisi pola 010, tentukan:
    a. Tentukan S_1, S_2, S_3, S_4
    b. Jika bisa, tentukan relasi recurrence-nya
16. Selesaikan relasi recurrence di bawah ini sehingga didapatkan rumus eksplisitnya:
    a. $C_n = 2\ C_{n-1} + 1$ jika $C_0 = 1$
    b. $a_n = 2^n\ a_{n-1}$ jika $a_0 = 1$
    c. $S_n = S_{n-1} + n - 1$ jika $S_1 = 0$
    d. $S_n = S_{n-1} + 2$ jika $S_0 = 0$
    e. $a_n = a_{n-1} + 1 + 2^{n-1}$ jika $a_0 = 0$
    f. $a_n = a_{n-1} + 4$ jika $a_0 = 0$
    g. $a_n = 6\ a_{n-1} + 9\ a_{n-2}$ jika $a_0 = a_1 = 1$

Bab 9

Peluang Diskrit

POKOK BAHASAN:

- ✓ Peluang Diskrit

TUJUAN BELAJAR:

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

- ✓ Memahami tentang konsep Peluang Diskrit

9.1 Peluang Diskrit

Antara kombinatorial dan teori peluang (probability) sebenarnya terkait erat. Teori peluang banyak menggunakan konsep-konsep kombinatorial. Teori probabilitas ini dikembangkan pertama kali pada abad tujuhbelas oleh ahli matematika Perancis Blaise Pascal. Dari hasil studi ini Pascal menemukan berbagai macam properti koefisien binomial. Pada abad delapan belas dikembangkan oleh ahli matematika dari Perancis Laplace. Aplikasi kombinatorial dan teori peluang saat ini meluas ke berbagai bidang ilmu lain maupun dalam kehidupan dunia nyata.

Kombinatorial didasarkan pada percobaan. Hasil percobaan diamati dan jumlah semua kemungkinannya dihitung. Misalnya melempar dadu yang memiliki 6 sisi, hasil yang muncul untuk satu kali pelemparan ada 6 kemungkinan yaitu muka 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pada kejadian mengambil 5 buah kartu remi dari 52 kartu, terdapat C(52,9) = 2.598.960 kemungkinan. Pada kejadian menjawab 10 pertanyaan pilihan berganda – tiap soal menyediakan 5 pilihan jawaban (a,b,c,d,e) maka terdapat 5^{10} kemungkinan jawaban.

Himpunan semua kemungkinan hasil percobaan dinamakan ruang sample. Setiap hasil percobaan di ruang sampel disebut dengan titik sampel. Hasil-hasil percobaan tersebut bersifat saling terpisah (mutually exclusive). Dikatakan saling terpisah karena dari seluruh ruang sampel, hanya satu titik sampel yang muncul. Misalnya pada percobaan melempar dadu, hasil percobaan yang muncul hanya salah satu dari 6 muka dadu, tidak mungkin muncul dua muka atau lebih, atau tidak mungkin salah satu dari enam muka dadu tidak ada yang muncul.

Misalnya ruang sample dilambangkan dengan S dan titik-titik sampelnya dilambangkan dengan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots$ maka $S = \{ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots \}$ Menyatakan ruang sampel dengan titik sampel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots$ Ruang sampel yang jumlah anggotanya terbatas disebut ruang sampel diskrit (discrete sample space). Peluang terjadinya sebuah sampel dinamakan **peluang diskrit** dan disimbolkan dengan $p(x_i)$.

Definisi

- Himpunan dari semua hasil yang mungkin muncul pada suatu percobaan statistik disebut ruang sampel yang dilambangkan dengan himpunan S, sedangkan anggota-anggota dari S disebut **titik sampel**.
- Misalkan x_i adalah sebuah titik sampel di dalam ruang sampel S. Peluang bagi x_i adalah ukuran kemungkinan terjadinya atau munculnya x_i di antara titik-titik sampel yang lain di S.
- Titik sampel yang mempunyai peluang lebih besar berarti kemungkinan terjadinya lebih besar pula, sedangkan titik sampel yang peluangnya lebih kecil berarti kemungkinan terjadinya juga lebih kecil.

Peluang diskrit mempunyai sifat sebagai berikut :

1. $0 \le p(x_i) \le 1$, $p(x_i)$ adalah nilai peluang.
2. $\sum_{i=1}^{|S|} p(xi) = 1$ yaitu jumlah peluang semua titik sampel didalam ruang sampel S adalah 1.

Contoh:

Pada pelemparan dadu, S = {1,2,3,4,5,6}. Peluang munculnya setiap angka = 1/6.

Contoh:

Uang logam mempunyai dua muka yaitu gambar (g) dan angka (a). Jika satu uang logam dilempar, maka peluang munculnya muka gambar = ½, muka angka = ½. Jika dua koin uang logam dilempar, maka ruang sampel adalah S = {aa, gg, ag, ga}. Peluang setiap titik sampel adalah

p(aa) = p(gg) = p(ag) = p(ga) = ¼.

Contoh :

Sebuah koin yang mempunyai sisi A dan sisi B dilempar keatas sebanyak 4 kali. Berapa peluang munculnya sisi A sebanyak 3 kali ?

Penyelesaian :

Jumlah kemungkinan munculnya sisi A sebanyak 3 kali adalah kombinasi C(4,3)=4. Jumlah seluruh hasil percobaan adalah 2x2x2x2 = 16, sehingga peluang munculnya sisi A sebanyak 3 kali adalah 4/16 = ¼.

9.2 Probabilitas terbatas (Finite Probability)

Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel, dilambangkan dengan E. Misalkan pada percobaan melempar dadu, kejadian munculnya angka ganjil adalah E = {1,3,5}, kejadian munculnya angka 1 = {1}. Kejadian yang hanya mengandung satu titik sampel disebut kejadian sederhana (simple event) dan kejadian yang mengandung lebih dari satu titik contoh disebut kejadian majemuk (compound event).

Suatu kejadian dikatakan terjadi jika salah satu dari titik contoh didalam kejadian tersebut terjadi. Peluang terjadinya kejadian didefinisikan sebagai berikut :

Definisi

Peluang kejadian E di ruang sampel S adalah p(E) = |E| / |S|.

Peluang kejadian E juga dapat diartikan sebagai jumlah peluang semua titik sampel di E. Jadi kita dapat menuliskan

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \sum_{x_i \in E} p(xi)$$

Contoh :

Pada percobaan melempar dadu, S = {1,2,3,4,5,6}. Kejadian munculnya angka ganjil E = {1,3,5}. Disini |S| = 6 dan |E| = 3. Kejadian munculnya angka ganjil adalah 3/6 = ½. Kita juga dapat menghitung peluang munculnya satu angka ganjil = 1/6, sehingga p(E) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = ½.

Contoh :

Dua buah dadu dilemparkan. Berapa peluang munculnya angka-angka dadu dengan jumlah 8 ?

Ruang sampel dari dua buah dadu adalah

Mata dadu	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ruang sampelnya sebanyak 36. Kejadian munculnya jumlah angka sama dengan 8 adalah E = {(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)}. Peluang munculnya jumlah angka sama dengan 8 adalah 5/36.

Contoh :

Berapa banyak cara mengambil 5 kartu dari 52 kartu remi ?

Ada C(52,5) = 2.598.960 cara yang berbeda

Contoh :

Kartu remi berjumlah 52. Keseluruhan kartu ini terdiri dari 13 jenis kartu, setiap jenis terdiri dari 4 buah kartu. Tiga belas jenis kartu tersebut adalah 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, joker, ratu, raja, as. Setiap pemain remi mendapatkan 5 buah kartu. Berapa peluang dari 5 kartu tersebut mengandung 4 kartu dari jenis yang sama ?

Penyelesaian :

Cara mengambil 5 kartu sembarang dari 52 buah kartu = C(52,5) (Ini adalah Ruang sampel).

Cara mengambil satu jenis kartu dari 13 jenis yang ada = C(13,1)

Cara mengambil 4 kartu dari 4 kartu yang sejenis = C(4,4)

Cara mengambil satu kartu lagi dari 48 kartu yang tersisa = C(48,1)

Peluang dari 5 kartu tersebut mengandung 4 kartu sejenis = C(13,1) x C(4,4) x C(48,1) / C(52,5) = 0.00024

Contoh

Berapa peluang dari 5 kartu tersebut mengandung 4 kartu as ?

Penyelesaian :

Untuk mengambil kartu as, maka hanya ada satu cara mengambil jenis kartu as.

Cara mengambil 4 kartu dari 4 kartu as = C(4,4)

Cara mengambil satu kartu lagi dari 48 kartu yang tersisa = C(48,1)

Cara mengambil 5 kartu sembarang dari 52 buah kartu = C(52,5)

Peluang dari 5 kartu tersebut mengandung 4 kartu as = 1 x C(4,4) x C(48,1) / C(52,5) = 0.0000185

9.3 Konsep Teori Himpunan pada Peluang Diskrit

Konsep-konsep pada teori Himpunan dapat diterapkan pada peluang diskrit. Misalkan diketahui ada dua himpunan A dan B adalah dua kejadian dalam ruang contoh S :

1. Kejadian bahwa A dan B terjadi sekaligus berarti munculnya salah satu titik sampel di dalam himpunan A $\cap$ B. Peluang terjadinya kejadian A dan B adalah

   $$P(A \cap B) = \sum_{x_i \in A \cap B} p(x_i)$$

2. Kejadian bahwa A atau B atau keduanya terjadi berarti munculnya salah satu titik sampel di A$\cup$ B. Peluang terjadinya kejadian A atau B adalah

   $$P(A \cup B) = \sum_{x_i \in A \cup B} p(x_i)$$

3. Kejadian bahwa A terjadi tetapi B tidak terjadi berarti munculnya salah satu titik sampel di A – B. Peluang terjadinya kejadian A tetapi B tidak adalah

$$P(A - B) = \sum_{x_i \in A-B} p(x_i)$$

4. Kejadian salah satu dari A dan B terjadi namun bukan keduanya berarti sama dengan munculnya salah satu titik sampel di A ⊕ B. Peluang terjadinya salah satu dari A dan B namun bukan keduanya adalah

$$P(A \oplus B) = \sum_{x_i \in A \oplus B} p(x_i)$$

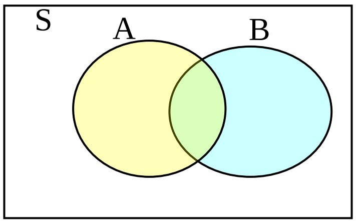
5. Komplemen dari kejadian A adalah p(~A) = 1-p(A)

9.4 Probabilitas Kejadian Majemuk A ∪ B dan A ∩ B

Bila A dan B adalah dua himpunan dalam himpunan semesta S, maka gabungan dari A dan B adalah himpunan baru yang anggotanya terdiri dari anggota A atau anggota B atau anggota keduanya.

$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

Diagram Venn untuk A ∪ B ditunjukkan gambar 9.1.



Gambar 9.1 Kejadian Majemuk A ∪ B

Probabilitas kejadian A ∪ B dinyatakan sebagai berikut :

$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Banyaknya anggota himpunan A ∪ B adalah :

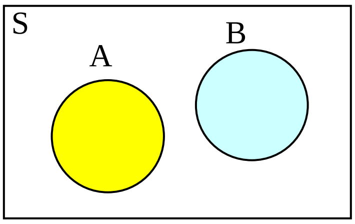
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Bila A dan B kejadian sembarang pada ruang sampel S, maka gabungan kejadian A dan B (A ∪ B) adalah kumpulan semua titik sampel yang ada pada A atau B atau keduanya. Kejadian A ∪ B dan A ∩ B disebut kejadian majemuk. Kejadian A ∩ B yaitu kumpulan titik sampel yang ada pada A dan B.

$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$

9.5 Dua Kejadian Saling Lepas

Bila A dan B adalah dua kejadian sembarang pada S dan berlaku $A \cap B = \varnothing$, maka A dan B dikatakan dua kejadian saling lepas atau saling terpisah (mutually exclusive). Gambar 9.2 menunjukkan dua kejadian saling lepas. Dua kejadian A dan B saling lepas artinya kejadian A dan B tidak mungkin terjadi secara bersamaan.



Gambar 9.2 Dua kejadian saling lepas

Dua kejadian saling lepas maka $p(A\cap B) = 0$, sehingga probabilitas kejadian $A\cup B$ dirumuskan sebagai berikut :

$p(A\cup B) = p(A) + p(B)$

9.6 Dua Kejadian Saling Bebas

Dua Kejadian A dan B dalam ruang sampel S dikatakan saling bebas jika kejadian A tidak mempengaruhi kejadian B dan sebaliknya. Jika A dan B merupakan dua kejadian saling bebas.

$P(A\cap B) = P(A).P(B)$

Jika A, B dan C kejadian saling bebas, maka peluang kejadian $A\cap B\cap C$:

$P(A\cap B\cap C) = p(A).\ p(B).\ p(C)$

Kenyataanya, kejadian-kejadian bebas jarang terjadi karena pada dasarnya antara kejadian satu dengan kejadian lainnya saling mempengaruhi baik secara langsung maupun tidak. Sebagai contoh : kejadian pasang surut Kali Ciliwung dengan harga motot Honda di Jakarta, banyaknya pemboman yang ada di Lebanon dengan banyaknya kematian yang ada di Jawa dan lain-lain. Pembicaraan mengenai kejadian-kejadian bebas sebenarnya kurang mempunyai arti praktis. Sebaliknya kejadian-kejadian tidak bebas (saling mempengaruhi) sangat penting untuk diketahui. Kejadian yang satu akan mempengaruhi kejadian lainnya sehingga sangat berguna untuk peramalan. Misalnya untuk peramalan produksi padi untuk tahun depan kalau penggunaan jumlah pupuk dinaikkan, ramalan hasil penjualan kalau biaya iklan dinaikkan, ramalan tentang tekanan darah kalau berat badan naik dan lain sebagainya.

Contoh :

Pada pelemparan dua uang logam, apakah kejadian munculnya muka dari uang logam pertama dan uang logam kedua saling bebas ?

Penyelesaian :

Kejadian tersebut saling bebas sebab dalam pelemparan dua uang logam secara sekaligus, muncul sisi apa saja dari uang logam pertama tidak ada sangkut pautnya dengan munculnya sisi apa saja dari uang logam kedua atau sebaliknya.

S = {(m,m), (m,b), (b,m), (b,b)}

Misalkan :

A = kejadian muncul muka(m) dari uang logam pertama

B = kejadian muncul muka(m) dari uang logam kedua

Maka kejadian majemuk $A \cap B$ menyatakan munculnya muka uang logam 1 dan munculnya muka uang logam 2. sehingga

$P(A) = ½$ $P(B) = ½$

Sehingga $p(A \cap B) = ½. ½ = ¼ = P(A).P(B)$

Dengan demikian karena berlaku $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ maka A dan B saling bebas.

Contoh :

Dari 100 orang mahasiswa ITB yang hadir dalam sebuah diskusi 80 orang laki-laki dan 20 orang perempuan. Diantara mahasiswa pria terdapat 35 orang yang memakai jaket almamater (pja) dan 45 orang yang tidak memakai jaket tersebut (ptja) dan diantara mahasiswa wanita terdapat 8 orang yang memakai jaket almamater (wja) dan 12 orang yang tidak memakainya (wtja). Kita ingin memilih salah seorang dari mahasiswa tersebut sebagai notulen. Maka ruang sampelnya adalah S = {pja, ptja, wja, wtja}. Peluang setiap mahasiswa dari kategori terpilih sebagai notulen adalah

P(pja) = 35 / 100 = 0.35

P(ptja) = 45 / 100 = 0.45

P(wja) = 8 / 100 = 0.08

P(wtja) = 12 / 100 = 0.12

Misalkan A adalah kejadian terpilihnya mahasiswa pria dan B adalah kejadian terpilihnya mahasiswa (i) yang memakai jaket almamater maka

$P(A) = 0.35 + 0.45 = 0.8$

$P(B) = 0.35 + 0.08 = 0.43$

$A \cap B$ menyatakan kejadian terpilihnya mahasiswa pria yang memakai jaket almamater :

$P(A \cap B) = 0.35$

$A \cup B$ menyatakan kejadian terpilihnya mahasiswa pria atau mahasiswa(i) yang memakai jaket almamater : $P(A \cup B) = 0.35 + 0.45 + 0.08 = 0.88$

$P(A \cup B) = 0.8 + 0.43 - 0.35 = 0.88$

$A \oplus B$ menyatakan kejadian terpilihnya mahasiswa pria yang tidak memakai jaket almamater atau mahasiswi yang memakai jaket : $P(A \oplus B) = 0.45 + 0.12 = 0.57$

$A - B$ menyatakan kejadian terpilihnya mahasiswa pria tetapi tidak memakai jaket almamater : $P(A - B) = 0.45$

Contoh :

Diantara 100 bilangan bulat positif pertama, berapa peluang memilih secara acak sebuah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5 ?

Penyelesaian :

Misalkan

A menyatakan kejadian bilangan bulat yang habis dibagi 3

B menyatakan kejadian bilangan bulat yang habis dibagi 5

$A \cap B$ menyatakan kejadian bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu bilangan bulat yang habis dibagi KPK dari 3 dan 5 yaitu 15) maka $A \cup B$ menyatakan kejadian bilangan bulat yang habis dibagi 3 atau 5.

Terlebih dahulu dihitung

$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33 \quad |B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20 \quad |A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$

untuk mendapatkan $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 33/100 + 20/100 - 6/100 = 0.47$

Jadi peluang bilangan yang habis dibagi 3 atau 5 adalah 0.45

Contoh :

Dari 8 bit (atau 1 byte) yang dibangkitkan secara acak, berapa peluang bahwa byte tersebut tidak dimulai dengan ‘11’ ?

Penyelesaian :

Misalkan A menyatakan kejadian bahwa byte yang dibangkitkan dimulai dengan ‘11’. Maka ~A menyatakan kejadian bahwa byte yang dibangkitkan tidak dimulai dengan ‘11’. Jumlah byte yang dimulai dengan ‘11’ adalah 2^6 = 64 buah karena 2 posisi pertama sudah diisi dengan ‘11’ sehingga kita cukup mengisi 6 posisi bit lainnya. Jadi |A| = 64. Ruang sampel S adalah himpunan semua bit yang panjangnya 8 disini |S| = 2^8 =256. Maka peluang byte yang dibangkitkan tidak dimulai dengan ‘11’ adalah

P(~A) = 1 – p(A) = 1 – 64/256 = 192 / 256

9.7 Ringkasan

- Himpunan dari semua hasil yang mungkin muncul pada suatu percobaan statistik disebut ruang sampel yang dilambangkan dengan himpunan S, sedangkan anggota-anggota dari S disebut **titik sampel**. Peluang terjadinya sebuah sampel dinamakan **peluang diskrit** dan disimbolkan dengan $p(x_i)$.
- Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel, Kejadian yang hanya mengandung satu titik sampel disebut kejadian sederhana (simple event) dan kejadian yang mengandung lebih dari satu titik contoh disebut kejadian majemuk (compound event).
- Konsep-konsep pada teori Himpunan dapat diterapkan pada peluang diskrit.

9.8 Latihan Soal

1. Sepuluh buah buku disusun di atas sebuah rak. Kesepuluh buku itu beragam topiknya, ada buku tentang fisika, buku kimia, buku biologi, buku matematika, dan buku sosiologi. Berapa peluang bahwa dari 10 buku itu tepat ada 2 buku untuk setiap topik?
2. Tujuh kecelakaan mobil terjadi dalam seminggu. Berapa peluang bahwa semuanya terjadi pada hari yang sama ?

3. Berapakah probabilitas jumlah kata (terdiri dari 8 huruf) yang dapat dibentuk dari 26 huruf, tanpa memperhitungkan arti kata yang terbentuk. Buatlah untuk dua kemungkinan (boleh mengulang huruf atau tidak boleh) ?
4. Berapa probabilitas banyaknya bilangan bulat positif 4 angka antara 1000 – 9999 (termasuk 1000 dan 9999) yang habis dibagi 5 dan 7 ?
5. Sebuah kardus berisi bola berwarna merah, biru dan ungu. Akan diambil 10 bola saja.

   (a) Berapa probabilitas mengambil bola jika bola merah paling sedikit 5

   (b) Berapa probabilitas mengambil bola jika bola merah paling banyak 5

Bab 10

Teorema Bayes

POKOK BAHASAN:

- ✓ Probabilitas Bersyarat
- ✓ Teorema Bayes

TUJUAN BELAJAR

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

- ✓ Memahami tentang konsep Probabilitas Bersyarat
- ✓ Memahami tentang Teorema Bayes

10.1 Probabilitas Bersyarat (Conditional Probability)

Probabilitas terjadinya kejadian A dengan syarat bahwa B sudah terjadi atau akan terjadi disebut probabilitas bersyarat (conditional probability) atau ditulis P(A/B).

$P(A/B) = p(A \cap B) / p(B)$

$P(B/A) = p(A \cap B) / p(A)$

Contoh :

Jumlah seluruh mahasiswa suatu Universitas(S) adalah 10.000 orang. Himpunan A mewakili 2000 mahasiswa lama(a). Himpunan B mewakili mahasiswa 3500 mahasiswa putri(b). Sedangkan 800 dari 3500 mahasiswa putri merupakan mahasiswa lama(c). A dan B merupakan himpunan bagian dari S. Kita memilih satu orang mahasiswa secara random maka kejadian bersyarat (A/B) adalah kejadian yang mewakili mahasiswa lama dengan syarat bahwa mereka putri. P(A/B) = probabilitas bersyarat diketahui mahasiswa yang terpilih putri, berapa probabilitasnya bahwa mahasiswa tersebut adalah mahasiswa lama.

$P(A/B) = p(A \cap B) / p(B) = 800/3500 = 0,23$ (merupakan peluang mahasiswa lama putri dengan seluruh mahasiswa putri)

P(B/A) = probabilitas bersyarat : diketahui mahasiswa yang terpilih adalah mahasiswa lama, berapa probabilitasnya bahwa mahasiswa tersebut putri.

$P(B/A) = p(A \cap B) / p(A) = 800/2000 = 0.4$

10.2 Probabilitas Kejadian Interseksi

Untuk menghitung probabilitas bersyarat, seolah-olah kita sudah mengetahui $p(A \cap B)$, p(A) dan p(B). Berdasarkan apa yang kita ketahui tersebut, kita akan menghitung p(A/B) atau p(B/A). Dalam prakteknya sukar sekali untuk menghitung $p(A \cap B)$. Untuk menghitung $p(A \cap B)$ rumus yang sering digunakan disebut **Aturan Umum dari Perkalian Probabilitas** sebagai berikut :

$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B) = p(A) \cdot p(B/A)$

Rumus tersebut berarti bahwa $p(A \cap B)$ = probabilitas bahwa A dan B terjadi secara simultan, sebetulnya merupakan hasil kali dari probabilitas dua kejadian.

Contoh :

Berapa probabilitas pengambilan dua kartu berturut-turut dari suatu set kartu bridge, jika yang terambil kartu yang pertama As dan kartu yang kedua juga As ? Hasil pengambilan pertama tidak dikembalikan lagi. (Hasil pengambilan kedua dipengaruhi oleh hasil pengambilan pertama)

Penyelesaian :

Diketahui bahwa :

S = 52 kartu (N)

A = pengambilan pertama As (a = 4), P(A) = 4/52

B/A = pengambilan kedua juga As dengan syarat bahwa pengambilan pertama As (b = 3 N = 51. Sewaktu pengambilan kedua dilakukan, kartu As hanya tinggal 3 sedangkan sisa kartu 51.

P(B/A) = 3/51

p(A $\cap$ B) = p(A) . p(B/A) = 4/52 * 3/51 = 0,0045

10.3 Probabilitas Bersyarat Untuk Dua Kejadian Saling Bebas
Bila A dan B dua kejadian dalam ruang sampel S yang saling bebas dengan P(A) $\neq$ 0 dan P(B) $\neq$ 0 maka berlaku

P(A/B) = $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(A).p(B)}{p(B)} = p(A)$

P(B/A) = $\dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{p(A).p(B)}{p(A)} = p(B)$

10.3 Teorema Bayes

Seorang ahli matematika Inggris, Thomas Bayes (1702-1761), mengembangkan teori untuk menghitung probabilitas tentang sebab-sebab terjadinya suatu kejadian (*causes*) berdasarkan pengaruh yang dapat diperoleh sebagai hasil observasi. Sejak perang dunia kedua telah berkembang apa yang disebut “Bayesian decision theory” yaitu teori keputusan berdasarkan perumusan Thomas Bayes yang bertujuan untuk memecahkan masalah pembuatan keputusan yang mengandung ketidakpastian (*decision making under uncertainty*)

Sebagai ilustrasi, misalkan terdapat 3 kotak yang sama ukurannya dan masing-masing berisi 2 bola. Bolanya sama, hanya warnanya berlainan. Kotak pertama berisi 2 bola merah (2M), kotak kedua berisi 1 merah dan 1 putih (1M, 1P) yang ketiga 2 putih (2P). Dengan mata tertutup anda diminta memilih satu kotak secara acak(random) dan memilih satu bola dari kotak terpilih juga secara acak. Anda diberitahu bahwa bola yang Anda pilih tersebut ternyata bola yang berwarna merah. Berapakah probabilitasnya bahwa kotak yang terpilih adalah kotak pertama, yang berisi dua bola merah? P(kotak pertama/Merah) ?

Pertanyaan ini akan dijawab setelah menerangkan tentang rumus Bayes. Pertanyaan diatas menyangkut probabilitas yang disebut *a posteriori probability atau posterior probability* yaitu probabilitas yang dihitung berdasarkan informasi yang diperoleh dari hasil observasi (dalam hal ini adalah dengan diketahuinya bola yang terambil itu merah. Probabilitas bahwa kotak yang memuat 2 bola merah itu terambil disebut *a priori* *probability atau prior probability* yaitu probabilitas yang perhitungan nilainya tidak didasarkan atas informasi dari observasi. Perlu disebut disini bahwa *atau posterior probability* merupakan probabilitas bersyarat, dimana syaratnya berupa informasi baru sebagai hasil observasi(yakni diketahui bola merah), sedangkan *prior probability* merupakan probabilitas tidak bersyarat.

Misalkan suatu himpunan lengkap mengenai berbagai kejadian yang terbagi habis (*a set of complete and mutually exclusive events*) A_1, A_2,..., A_i, ...,A_k, (i = 1,2,3,...,k). Terjadinya salah satu kejadian, katakan A_i, merupakan salah satu syarat yang diperlukan untuk terjadinya kejadian lainnya, misalnya A, yang sudah diketahui sebagai hasil obsevasi (misalnya bola yang terpilih merah = M) $P(A/ A_i)$ dan $p(A_i)$ diketahui. The The *posterior probability* kejadian A_i dengan syarat bahwa A sudah atau akan terjadi dapat dihitung berdasarkan rumus Bayes berikut :

$$p(A_i / A) = \frac{p(A_i)\,p(A_i / A)}{\sum_{i=1}^{k} p(A_i)\,p(A_i / A)}$$

$P(A_i/A)$ untuk menjawab pertanyaan : jika diketahui kejadian A terjadi, berapakah probabilitasnya bahwa kejadian tersebut didahului kejadian A_i. Dalam contoh bola diatas, dimana i = 1, ini diketahui bola yang terambil merah, sehingga berapakah probabilitasnya bahwa bola tersebut berasal dari kotak pertama ?

2 M	1 M 1 P	2 P
Kotak 1	Kotak 2	Kotak 3

K = 3, A_1, A_2, A_3, (kejadian, pemilihan kotak)

A merupakan kejadian terpilihnya bola merah setelah salah satu kotak terpilih.

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$ yaitu probabilitas bahwa kotak 1,2,3 terpilih masing-masing kotak mempunyai probabilitas yang sama.

$P(A/ A_1) = 2/2 = 1$, $p(A/ A_2) = ½$, $p(A/ A_3) = 0$ yaitu probabilitas untuk mendapatkan bola merah, dengan syarat kalau kotak 1,2,3 terpilih.

$P(A) = P(A_1)\,P(A/ A_1) + P(A_2)\,P(A/ A_2) + P(A_3)\,P(A/ A_3)$

$\quad = 1/3(1) + 1/3(1/2) + 1/3\,(0)$

= ½

$$P(A_1/A) = \frac{p(A_1)\,p(A/A_1)}{p(A)} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}$$

= 2/3 yaitu probabilitas kotak pertama terpilih dengan syarat bola merah terpilih.

$$P(A_2/A) = \frac{p(A_2)\,p(A/A_2)}{p(A)} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}$$

= 1/3 yaitu probabilitas kotak kedua terpilih dengan syarat bola merah terpilih

$$P(A_3/A) = \frac{p(A_3)\,p(A/A_3)}{p(A)} + \frac{\frac{1}{3}(0)}{\frac{1}{2}}$$

= 0 yaitu probabilitas kotak ketiga terpilih dengan syarat bola merah terpilih

Dengan perkataan lain $P(A_1/A)$, $P(A_2/A)$, $P(A_3/A)$ adalah suatu probabilitas untuk menjawab pertanyaan : jika bola yang terpilih merah, berapa probabilitasnya bahwa bola tersebut berasal dari kotak 1, 2, 3 ?

Contoh :

Suatu daftar pertanyaan dikirimkan kepada para responden untuk mengetahui penggunaan mobil keluarga. Kita anggap suatu nilai "a *priori probability*" bahwa daftar pertanyaan tersebut akan diisi oleh keluarga yang tinggal di Jakarta adalah 0,5. Probabilitas bahwa daftar pertanyaan diisi oleh mereka yang berpenghasilan tinggi adalah 0,3. Berdasarkan pengalaman, probabilitas bahwa daftar pertanyaan yang dikirim ke penduduk di luar Jakarta diisi oleh mereka yang berpenghasilan tinggi sama dengan 0,2. Kita gunakan simbol sebagai berikut :

A_1 = keluarga yang tinggal di luar Jakarta

A_2 = keluarga yang tinggal di Jakarta

A = keluarga berpenghasilan tinggi

$P(A_1) = 0,5$

$P(A_2) = 1 - P(A_1) = 1 – 0,5 = 0,5$

$P(A) = 0,3$

$P(A/A_1) = 0{,}2$

Misalkan daftar pertanyaan yang sudah diisi sudah kita terima, sedangkan kode mengenai tempat tinggal responden sudah dihapus. Dengan demikian kita tidak mengetahui apakah responden tersebut tinggal di luar Jakarta atau Jakarta. Kalau daftar pertanyaan tersebut diisi oleh keluarga yang berpendapatan tinggi : Berapa probabilitasnya bahwa responden atau keluarga tersebut bertempat tinggal di luar Jakarta , $P(A_1/A)$?

$$P(A_1/A) = \frac{P(A1/A)}{p(A)}$$

$$= \frac{p(A_1)P(A/A_1)}{p(A)}$$

$$= \frac{(0{,}5)(0{,}2)}{(0{,}3)} = \mathbf{1/3}$$

10.4 Ringkasan

- Probabilitas terjadinya kejadian A dengan syarat bahwa B sudah terjadi atau akan terjadi disebut probabilitas bersyarat (conditional probability)
- Seorang ahli matematika Inggris, Thomas Bayes (1702-1761), mengembangkan teori untuk menghitung probabilitas tentang sebab-sebab terjadinya suatu kejadian (*causes*) berdasarkan pengaruh yang dapat diperoleh sebagai hasil observasi. Sejak perang dunia kedua telah berkembang apa yang disebut "Bayesian decision theory" yaitu teori keputusan berdasarkan perumusan Thomas Bayes yang bertujuan untuk memecahkan masalah pembuatan keputusan yang mengandung ketidakpastian (*decision making under uncertainty*)

$$p(A_i / A) = \frac{p(A_i)\,p(A_i / A)}{\sum_{i=1}^{k} p(A_i)\,p(A_i / A)}$$

10.5 Latihan Soal

1. Berapa peluang sebuah bilangan bulat yang dipilih secara acak dari 100 bilangan bulat positif pertama bernilai genap?

2. Berapa peluang dari 5 buah kartu remi yang dibagi tidak mengandung ratu satu buah pun?
3. Ada sepuluh pasang sepatu di dalam lemari. Jika delapan sepatu diambil secara acak, berapa peluang tidak ada sepasang sepatu yang terambil ?
4. Sepuluh orang masuk lift pada lantai dasar sebuah gedung bertingkat 20. Berapa peluang mereka semua keluar pada lantai/tingkat yang berbeda ?

Bab 11

Graph

POKOK BAHASAN:

- Definisi Graph
- Graph Tidak Berarah
- Graph Berarah
- Graph Sederhana, Lengkap
- Sub Graph
- Graph Isomorfik
- Lintasan & Sirkuit Euler
- Lintasan & Sirkuit Hamilton

TUJUAN BELAJAR:

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Menggambarkan dengan contoh terminologi dasar mengenai teori graph, dan beberapa sifat dan contoh khusus dari masing-masing.
2. Memahami cara memodelkan permasalahan dalam ilmu komputer menggunakan graph.
3. Dapat menghubungkan graph dengan struktur data, algoritma, dan counting.

Teori graph merupakan pokok bahasan yang memiliki banyak penerapan. Graph digunakan untuk merepresentasikan obyek-obyek diskrit dan hubungan antar obyek-obyek tersebut.

11.1 Definisi Graph

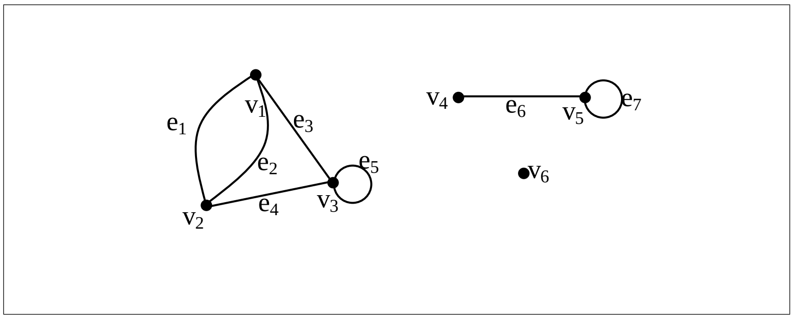
Graph G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E), dimana:
V = himpunan berhingga dan tidak kosong dari simpul-simpul (vertices atau node).
E = himpunan garis/sisi (edges atau arcs) yang menghubungkan sepasang simpul.
atau biasa ditulis notasi G = (V,E).

Simpul pada graph dapat dinomori dengan huruf, seperti v, w, ..., dengan bilangan 1, 2, 3, ..., atau gabungan keduanya. Sedangkan garis yang menghubungkan simpul v_i dengan simpul v_j dinyatakan dengan pasangan (v_i , v_j) atau dengan lambang e_1, e_2, e_3, ...

Beberapa definisi dalam teori graph adalah sebagai berikut:

- Graph G didefinisikan sebagai himpunan simpul V(G) dan himpunan garis E(G), dimana tiap simpul berasosiasi dengan himpunan yang berisi satu atau lebih simpul yang disebut **titik ujung**.
- Garis dengan satu titik ujung disebut dengan **loop**.
- Dua garis yang memiliki titik ujung yang sama disebut **garis paralel**.
- Dua simpul yang dihubungkan oleh sebuah garis disebut **adjacent**.
- Satu atau lebih garis berakhir pada satu titik ujung yang disebut **incident**.
- Simpul-simpul yang tidak memiliki garis incident disebut **titik terasing**.
- Graph yang tidak memiliki simpul disebut **graph kosong**.

Gambar 11.1 menjelaskan mengenai beberapa definisi di atas.



Gambar 11.1 Contoh Sebuah Graph

Dari graph pada Gambar 11.1 dapat dijelaskan sebagai berikut:

- $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

  Titik-titik ujung masing-masing garis adalah:

Garis	Titik Ujung
e_1	$\{ v_1, v_2 \}$
e_2	$\{ v_1, v_2 \}$
e_3	$\{ v_1, v_3 \}$
e_4	$\{ v_2, v_3 \}$

Garis	Titik Ujung
e_5	$\{ v_4, v_5 \}$
e_6	$\{ v_5 \}$
e_7	$\{ v_3 \}$

- Loop adalah e_6 dan e_7.
- Garis paralel adalah e_1 dan e_2, dimana keduanya menghubungkan titik v_1 dengan v_2
- Adjacent terhadap v_1 adalah v_2 dan v_3

  Adjacent terhadap v_4 adalah v_5
- Incident dari e_1 adalah e_2, e_3, e_4

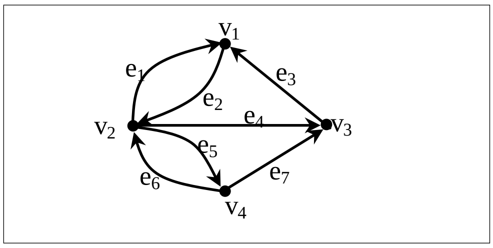
  Incident dari e_2 adalah e_1, e_3, e_4, e_5

  Incident dari e_6 adalah e_7
- Titik terasing adalah v_6

11.2 Graph Tidak Berarah

Menurut jenis garis-garisnya, graph dibedakan menjadi dua jenis, yaitu graph berarah dan graph tidak berarah. **Graph tidak berarah** adalah graph yang garis-garisnya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graph tidak berarah urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Sehingga $(v_i , v_j) = (v_j , v_i)$ adalah sisi yang sama. Graph pada Gambar 7.1 merupakan contoh graph tidak berarah.

Graph berarah adalah graph yang setiap garisnya diberikan orientasi arah. Pada graph berarah (v_j , v_k) dan (v_k , v_j) menyatakan dua buah garis yang berbeda. Atau dapat dikatakan $(v_j , v_k) \neq (v_k , v_j)$. Untuk garis (v_j , v_k), simpul v_j dinamakan simpul asal (initial vertex) dan simpul v_k dinamakan simpul terminal (terminal vertex). Pada Gambar 11.2 diberikan contoh graph berarah.



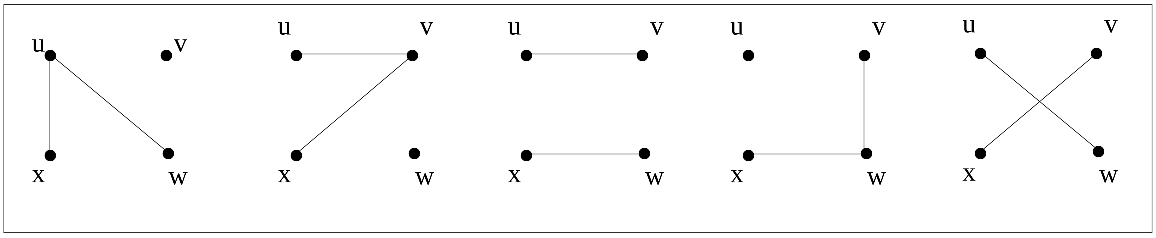
Gambar 11.2 Contoh Graph Berarah

11.2.1 Definisi dan Notasi dari Graph Sederhana, Graph Lengkap, dan Sub Graph

Graph Sederhana adalah graph yang tidak memiliki loops atau garis paralel. Dalam Graph Sederhana, garis dengan titik ujung v dan w dinotasikan (v,w).

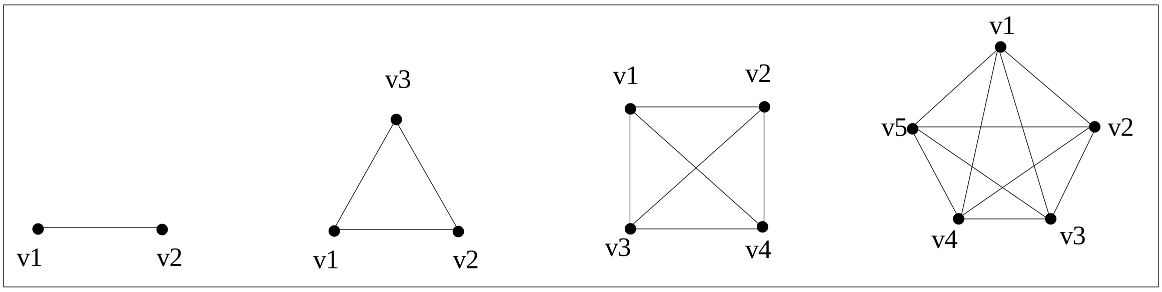
Contoh :

Beberapa graph sederhana yang memiliki empat simpul {u,v,w,x} dan dua garis{u,v}



Gambar 11.3 Simple Graph dari Empat Simpul dan Dua Garis

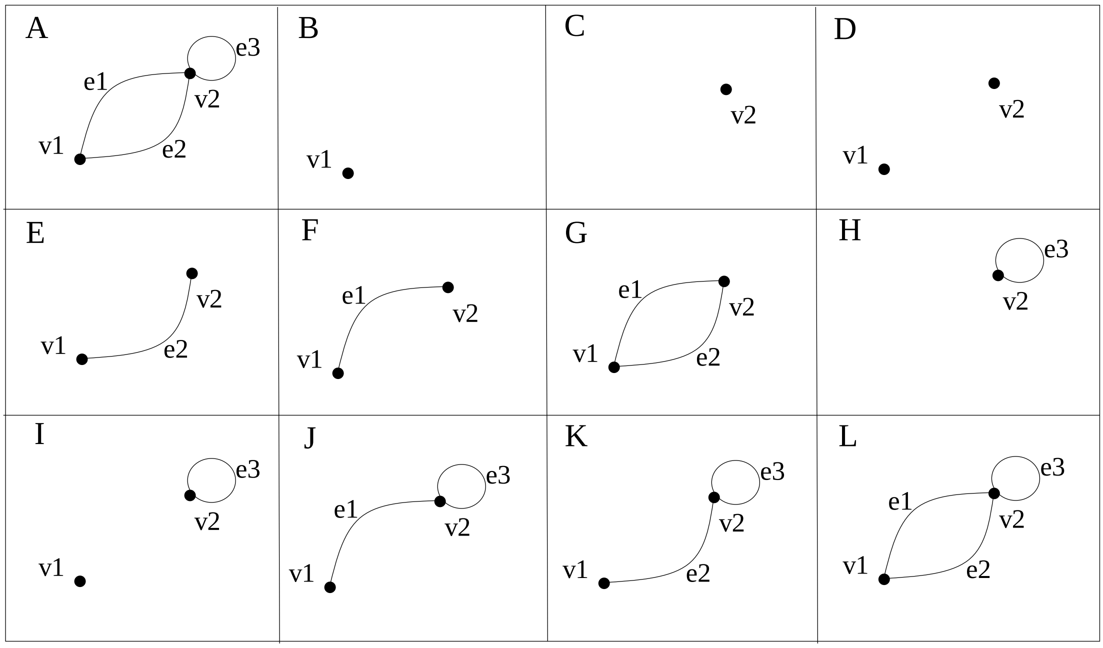
Graph Lengkap pada n verteks dinotasikan Kn adalah graph dengan n simpul v1,v2, … , vn yang mempunyai himpunan garis yang berisi tepat satu garis untuk tiap pasangan simpul yang berbeda. Graph lengkap untuk jumlah simpul 2, 3, 4, 5 digambarkan pada gambar 11.4.



Gambar 11.4 Graph Lengkap untuk jumlah simpul 2, 3, 4, 5

Graph H dikatakan merupakan **Sub Graph** dari graph G jika-dan-hanya-jika, setiap simpul dalam H juga merupakan simpul dari G, dan setiap garis dalam H juga merupakan garis dari G, dan setiap garis dalam H mempunyai titik ujung yang sama dengan G.

Pada Gambar 11.5 diberikan gambaran sebuah graph dan sub graph-nya. Gambar 11.5 A adalah graph yang utuh, sementara Gambar 11.5 B sampai L merupakan sub graphnya.



Gambar 11.5 Graph Lengkap dan Sub Graph-nya

11.2.2 Konsep Derajat pada Graph

Derajat dari sebuah simpul adalah jumlah garis yang menjadi incident pada simpul tersebut. Misal G adalah Graph dan v adalah simpul dari G. Derajat dari v, dinotasikan **deg(v)** sama dengan jumlah garis yang menjadi incident pada v. Total derajat dari G adalah jumlah derajat dari semua simpul pada G. Derajat dari sebuah loop adalah 2.

Sebagai contoh derajat dari graph pada Gambar 11.5 A dapat dihitung :

Total derajat = deg(v1) + deg(v2) = 2 + 4 = 6.

Misal G adalah Graph dan jumlah derajat dari semua simpul dari G sama dengan dua kali jumlah garis dari G. Jika simpul dari G dinyatakan sebagai v1,v2, …, vn dimana n adalah integer positif, maka :

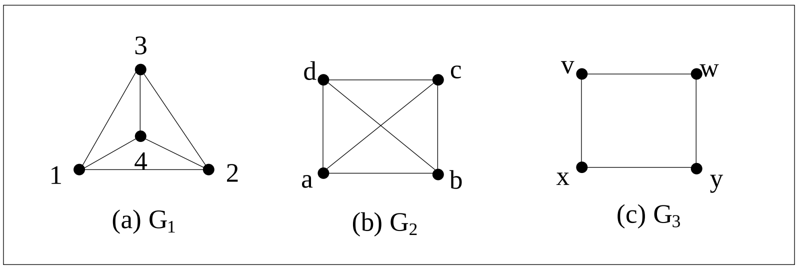
Total derajat dari G = deg(v1) + deg(v2) + … + deg(vn)

= 2. (jumlah garis pada G)

11.3 Graph Isomorfik

Dua buah graph yang isomorfik adalah dua buah graph yang sama, kecuali penamaan simpul dan garisnya saja yang berbeda. Hal ini dibenarkan karena sebuah graph dapat digambarkan dalam banyak cara.

Pada Gambar 11.6 G_1 isomorfik dengan G_2. Simpul 1, 2, 3 dan 4 di G_1 berkoresponden dengan simpul a, b, c dan d di G_2. Garis (1,2), (2,3), (3,1), (3,4), (1,4) dan (2,4) berkoresponden dengan sisi (a,b), (b,c), (c,d), (a,d), (a,c) dan (b,d). Semua simpul di G_1 dan G_2 berderajat 3. G_1 maupun G_2 tidak isomorfik dengan G_3, karena simpul-simpul di G_3 berderajat dua, sedangkan sismpul-simpul di G_1 dan G_2 berderajat tiga.

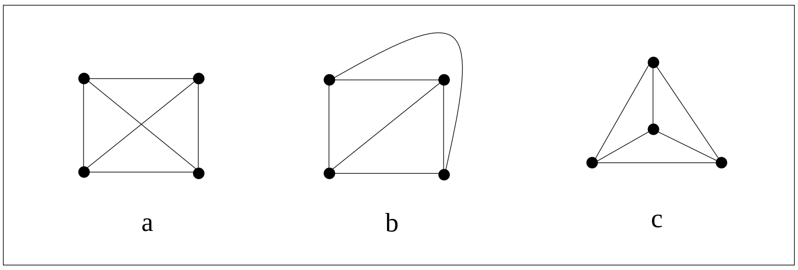


Gambar 11.6 G_1 isomorfik dengan G_2, sedang G_1 tidak isomorfik dengan G_3

11.4 Graph Planar dan Graph Bidang

Graph planar adalah graph yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong. Suatu graph kemungkinan merupakan graph planar meskipun graph ini digambarkan dengan garis-garis yang saling berpotongan, karena graph tersebut dapat digambarkan dengan cara berbeda yang garis-garisnya tidak saling berpotongan. Gambar 11.7 adalah graph planar karena kita dapat menggambarkan graph tersebut dengan sisi-sisi yang tidak berpotongan

Graph planar yang digambarkan dengan garis-garis yang tidak saling berpotongan disebut graph bidang (plane graph). Pada Gambar 11.7 ketiga buah graph adalah graph planar, tetapi graph a bukan graph bidang, sedangkan graph b dan c adalah graph bidang. Ketiga graph ini isomorfik.



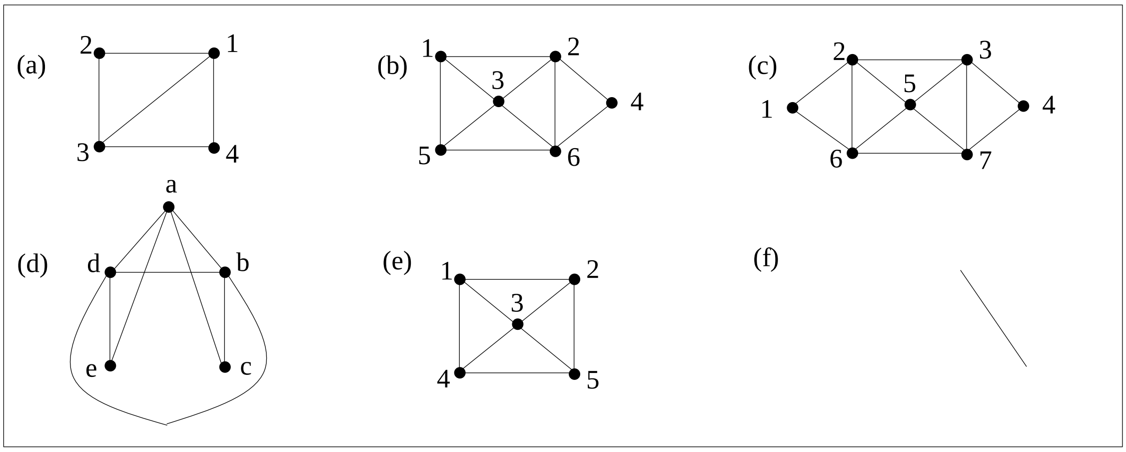
Gambar 11.7 Contoh tiga buah Graph Planar. Graph b dan c adalah Graph Bidang

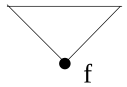
11.5 Lintasan dan Sirkuit Euler

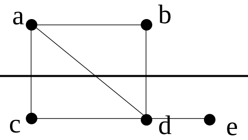
Lintasan Euler adalah lintasan yang melalui masing-masing garis di dalam graph tepat satu kali. Bila lintasan tersebut kembali ke simpul asal, membentuk lintasan tertutup (sirkuit), maka lintasan tertutup itu dinamakan **sirkuit Euler**. Jadi, sirkuit Euler adalah sirkuit yang melewati masing-masing garis tepat satu kali.

Graph yang mempunyai sirkuit Euler disebut graph Euler (*Eulerian Graph*). Graph yang mempunyai lintasan Euler dinamakan graph semi-Euler (*semi Eulerian graph*).

Lintasan Euler pada Graph Gambar 11.8 (a) : 3,1,2,3,4,1. Lintasan Euler pada Gambar 11.8 (b) : 1,2,4,6,2,3,6,5,3,1,5. Sirkuit Euler pada Graph Gambar 11.8 (c) : 1,2,3,4,7,3,5,7,6,5,2,6,1. Sirkuit Euler pada Graph Gambar 11.8 (d) : a,c,f,e,c,b,d,e,a, d,f,b,a. Graph (e) dan (f) tidak mempunyai lintasan maupun sirkuit Euler.





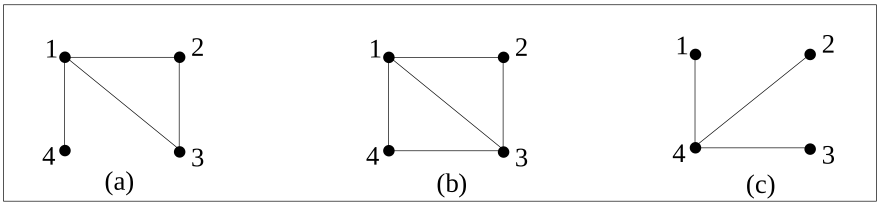


Gambar 11.8 (a) dan (b) Graph yang mempunyai lintasan Euler (graph semi-Euler)
(c) dan (d) Graph yang mempunyai sirkuit Euler (graph Euler)
(e) dan (f) Graph yang tidak memiliki lintasan dan sirkuit Euler

11.6 Lintasan dan Sirkuit Hamilton

Lintasan Hamilton adalah lintasan yang melalui tiap simpul dalam graph tepat satu kali. Bila lintasan tersebut kembali ke simpul asal membentuk lintasan tertutup (sirkuit), maka lintasan tertutup tersebut dinamakan sirkuit Hamilton. Jadi sirkuit Hamilton adalah sirkuit yang melalui tiap simpul di dalam graph tepat satu kali, kecuali simpul asal (sekaligus simpul akhir) yang dilalui dua kali.

Graph yang memiliki sirkuit Hamilton dinamakan graph Hamilton sedangkan graph yang memiliki lintasan Hamilton dinamakan graph semi-Hamilton.



Gambar 11.9 (a) Graph yang memiliki lintasan Hamilton (3,2,1,4)
(b) Graph yang memiliki sirkuit Hamilton (1,2,3,4,1)
(c) Graph yang tidak memiliki lintasan maupun sirkuit Hamilton

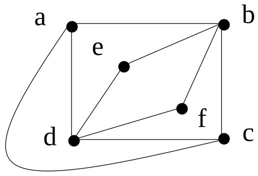
11.7 Ringkasan

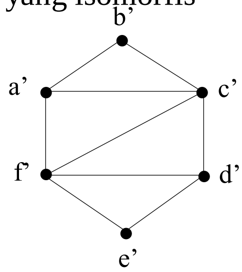
1. Graph adalah himpunan dari beberapa buah simpul dan beberapa buah garis, yang sering dinotasikan dengan G = (V, E).
2. Graph berdasarkan orientasi arahnya dibedakan menjadi 2, yaitu graph tidak berarah dan graph berarah.
3. Graph sederhana adalah graph yang tidak memiliki loop dan garis yang paralel.
4. Graph lengkap adalah graph yang memiliki tepat satu garis untuk tiap pasangan simpul yang berbeda.
5. Derajat dari sebuah graph dapat disimpulkan sebesar 2 kali jumlah garis yang ada dalam graph tersebut.

11.8 Latihan Soal

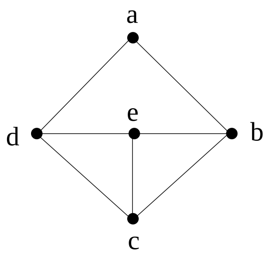
1. Berapa jumlah simpul yang dimiliki oleh sebuah graph G jika G mempunyai:
   a. 16 garis dan semuanya berderajat 2
   b. 21 garis, 3 simpul berderajat 4, dan sisanya berderajat 3
   c. 24 garis dan semuanya berderajat sama
2. Misalkan G adalah graph dengan 12 garis. Misalkan pula G memiliki 6 titik berderajat 3 dan sisanya berderajat kurang dari 3. Tentukan jumlah minimum titik dalam G !
3. Dalam sebuah pesta, sepuluh orang saling berjabar tangan. Tiap orang hanya berjabat tangan satu kali dengan orang lainnya. Hitung jumlah jabat tangan yang terjadi (Petunjuk: modelkan persoalan ini ke dalam graph)
4. Tunjukkan bahwa derajat maksimum sembarang simpul pada graph sederhana dengan n simpul adalah n-1.
5. Tentukan mana di antara graph berikut ini yang isomorfis

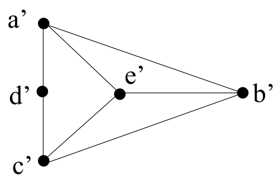
   a.



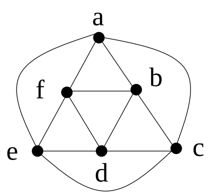


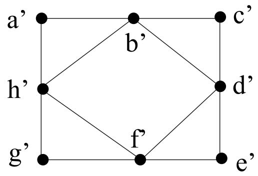
   b.





   c.

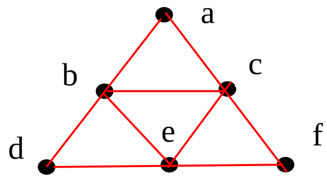




6. Gambarkan graph yang mempunyai lintasan Hamilton tetapi tidak mempunyai sirkuit Hamilton.

7. Selesaikan soal graph di bawah ini:

   a. Tentukan sirkuit Euler yang ada pada graph berikut:



Bab 12

Tree

POKOK BAHASAN:

- Pohon (*Tree*)
- Pohon Rentang (*Spanning trees*)
- Strategi Kunjungan (*Traversal strategies*)

TUJUAN BELAJAR:

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Memahami metode kunjungan yang berbeda dari tree.
2. Memahami cara memodelkan permasalahan dalam ilmu komputer menggunakan tree.
3. Dapat menghubungkan tree dengan struktur data, algoritma, dan counting.

Dalam bab ini kita akan mempelajari satu bentuk tak linier yang mempunyai sifat-sifat khusus, yang dinamakan pohon (*tree*). Bentuk ini biasanya digunakan untuk menggambarkan hubungan yang bersifat hirarkis antara elemen-elemen yang ada.

Silsilah keluarga, hasil pertandingan yang berbentuk turnamen, atau struktur organisasi dari sebuah perusahaan adalah contoh dalam organisasi tree. Dalam pemrograman, sebuah pohon terdiri dari elemen-elemen yang dinamakan *node*(simpul) yang mana hubungan antar simpul bersifat hirarki. Simpul yang paling atas dari hirarki dinamakan *root*. Simpul yang berada di bawah root secara langsung, dinamakan anak dari root, yang mana biasanya juga mempunyai anak di bawahnya. Sehingga bisa disimpulkan, kecuali root, masing-masing simpul dalam hirarki mempunyai satu induk (parent).

Jumlah anak sebuah simpul induk sangat bergantung pada jenis dari pohon. Jumlah anak dari simpul induk ini dinamakan faktor percabangan. Pada bab ini pembahasan difokuskan pada *binary tree*, yaitu pohon yang mempunyai faktor percabangan 2.

12.1 Deskripsi dari *Binary Tree*

Sebuah binary tree adalah sebuah pengorganisasian secara hirarki dari beberapa buah simpul, dimana masing-masing simpul tidak mempunyai anak lebih dari 2. Simpul yang berada di bawah sebuah simpul dinamakan anak dari simpul tersebut. Simpul yang berada di atas sebuah simpul dinamakan induk dari simpul tersebut.

Masing-masing simpul dalam binary tree terdiri dari tiga bagian : sebuah data dan dua buah pointer yang dinamakan pointer kiri dan kanan. Dengan menggunakan tiga bagian ini, kita menampilkan sebuah binary tree dengan melakukan setting pada pointer kiri dan kanan untuk menghubungkan sebuah simpul dengan anak-anaknya. Jika sebuah simpul tidak mempunyai anak pada pointer kiri atau kanan, kita melakukan setting pada pointer tersebut pada NULL, yang menunjukkan akhir dari percabangan adalah pada simpul tersebut. Sebuah percabangan adalah kumpulan dari simpul-simpul yang dimulai dari sebuah root dan diakhiri dengan sebuah simpul terakhir. Simpul terakhir adalah simpul dari tree yang tidak mempunyai anak. Kadang-kadang ketika kita bekerja dengan beberapa pohon dalam satu waktu, maka pohon-pohon tersebut dinamakan sebuah hutan.

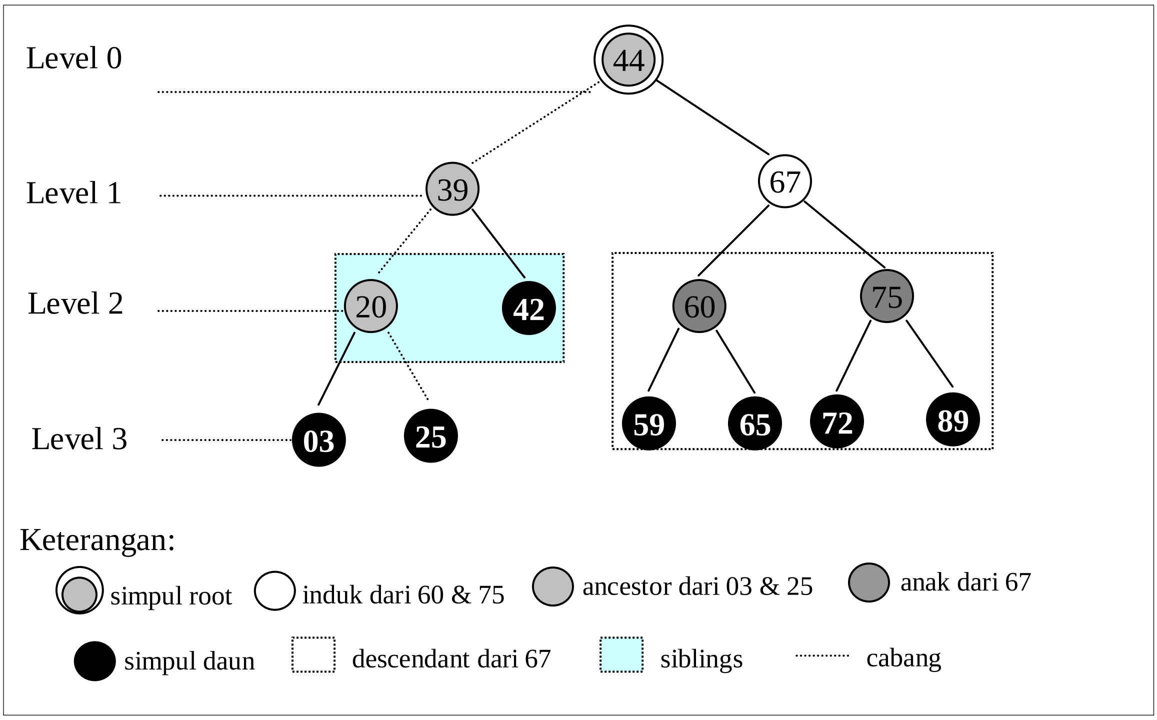
12.2 Istilah-Istilah Dasar

Simpul juga mempunyai *sibling*, *descendants*, dan *ancestors*. ***Sibling*** dari sebuah simpul adalah anak lain dari induk simpul tersebut. ***Descendants*** dari sebuah simpul adalah semua simpul-simpul merupakan cabang (berada di bawah) simpul tersebut. ***Anchestors*** dari sebuah simpul adalah semua simpul yang berada di atas antara simpul tersebut dengan *root*. Penampilan dari sebuah tree akan ditampilkan dengan berat dari tree tersebut, angka yang menunjukkan jumlah level yang ada di dalamnya.

Tingkat suatu simpul ditentukan dengan pertama kali menentukan akar sebagai bertingkat 1. Jika suatu simpul dinyatakan sebagai tingkat N, maka simpul-simpul yang merupakan anaknya akan berada pada tingkatan N + 1.

Tinggi atau kedalaman dari suatu pohon adalah tingkat maksimum dari simpul dalam pohon dikurangi dengan 1.

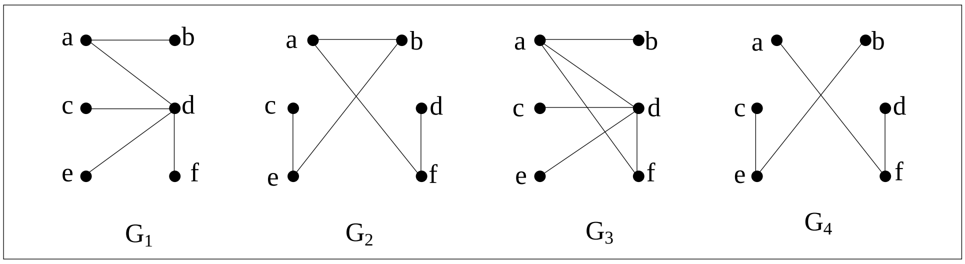
Selain tingkat, juga dikenal istilah derajad (degree) dari suatu simpul. Derajad suatu simpul dinyatakan sebagai banyaknya anak atau turunan dari simpul tersebut



Gambar 12.1 Ilustrasi Sebuah Pohon Biner dengan Kedalaman 3

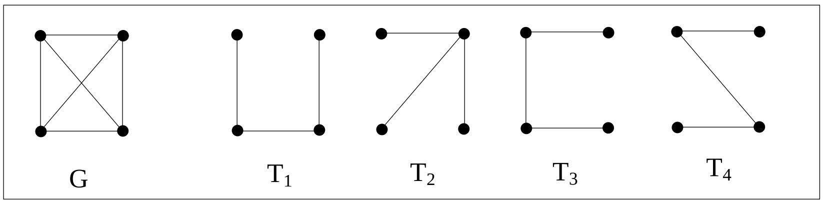
12.3 Pohon Rentang

Pohon didefinisikan sebagai graph tak berarah, terhubung, dan tidak mengandung sirkuit. Dari definisi ini, jika dilihat pada Gambar 5.3 maka G_1 dan G_2 adalah pohon. G_3 dan G_4 bukan pohon. G_3 mengandung sirkuit a, d, f, a, sedangkan G_4 tidak terhubung.



Gambar 12.2 Contoh Graph yang merupakan Pohon dan Bukan Pohon

Misalkan G = (V, E) adalah graph tidak berarah terhubung yang bukan pohon, yang berarti di G terdapat beberapa sirkuit. G dapat dirubah menjadi pohon T = (V_1, E_1) dengan cara memutuskan sirkuit-sirkuit yang ada. Caranya, mula-mula dipilih sebuah sirkuit, lalu hapus satu buah sisi dari sirkuit ini. G akan tetap terhubung dan jumlah sirkuitnya berkurang satu. Pohon rentang (spanning tree) akan didapatkan bila proses tersebut dilakukan berulang-ulang sampai semua sirkuit di G hilang. Dinamakan pohon rentang dikarenakan semua simpul pada pohon T sama dengan semua simpul pada graph G, dan sisi-sisi pada pohon T $\subseteq$ sisi-sisi pada graph G. Pada Gambar 12.3 diiustrasikan Graph lengkap dan empat buah contoh pohon rentangnya.



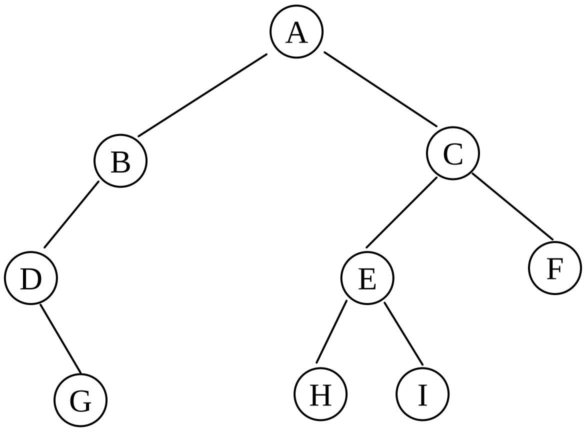
Graph 12.3 Graph Lengkap G dan 4 Pohon Rentangnya

12.4 Strategi Traversal (Kunjungan)

Proses traversing dari sebuah binary tree artinya melakukan kunjungan pada setiap simpul pada suatu pohon biner tepat satu kali. Kunjungan dapat dilakukan dengan tiga cara, yaitu kunjungan secara preorder, inorder, dan secara postorder. Selain itu, berdasarkan kedudukan setiap simpul dalam pohon, juga bisa dilakukan kunjungan secara levelorder. Ketiga macam kunjungan yang pertama bisa dilaksanakan secara rekursif.

12.4.1 Kunjungan Preorder

Kunjungan preorder dilakukan dengan mencetak simpul yang dikunjungi, kunjungan cabang kiri, dan kunjungan cabang kanan. Untuk lebih jelasnya perhatikan pohon biner pada Gambar 12.4.

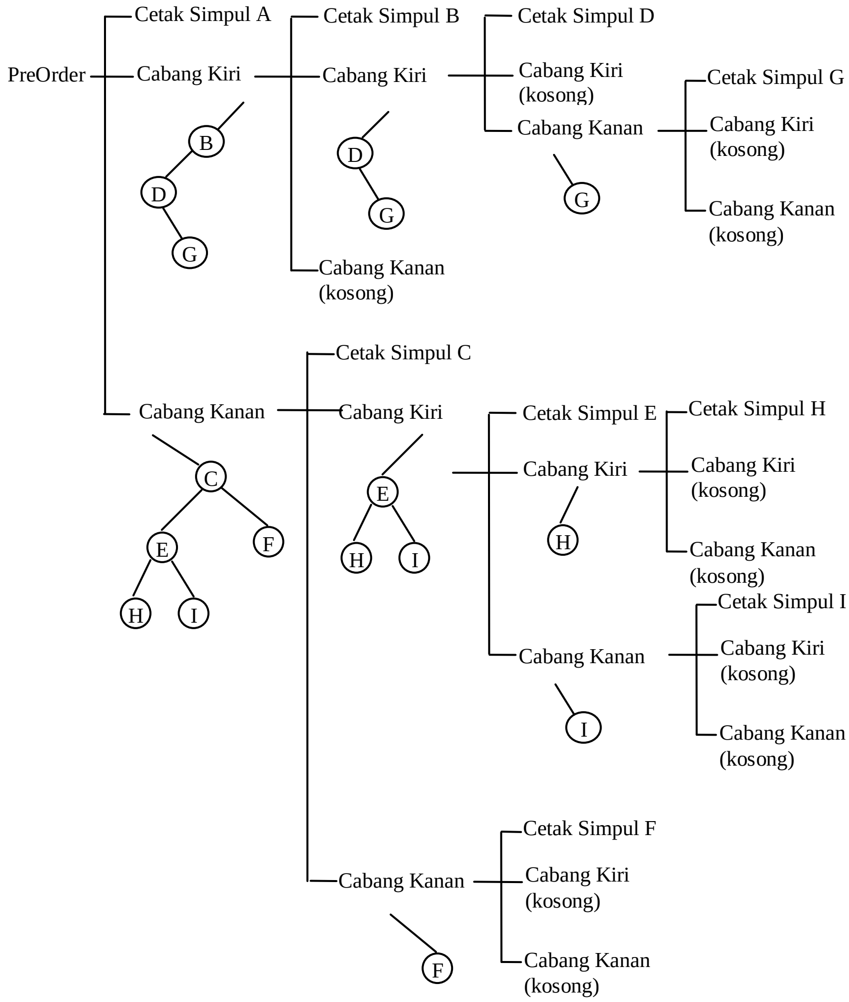


Gambar 12.4 Contoh Pohon Biner

Kunjungan preorder, juga disebut dengan *depth first order*, menggunakan urutan:

- Cetak isi simpul yang dikunjungi
- Kunjungi cabang kiri
- Kunjungi cabang kanan

Dari gambar 12.5 nampak pelacakan kunjungan PreOrder. Hasil dari pelacakan kunjungan secara PreOrder tersebut akan didapatkan hasil ‘ABDGCEHIF’.



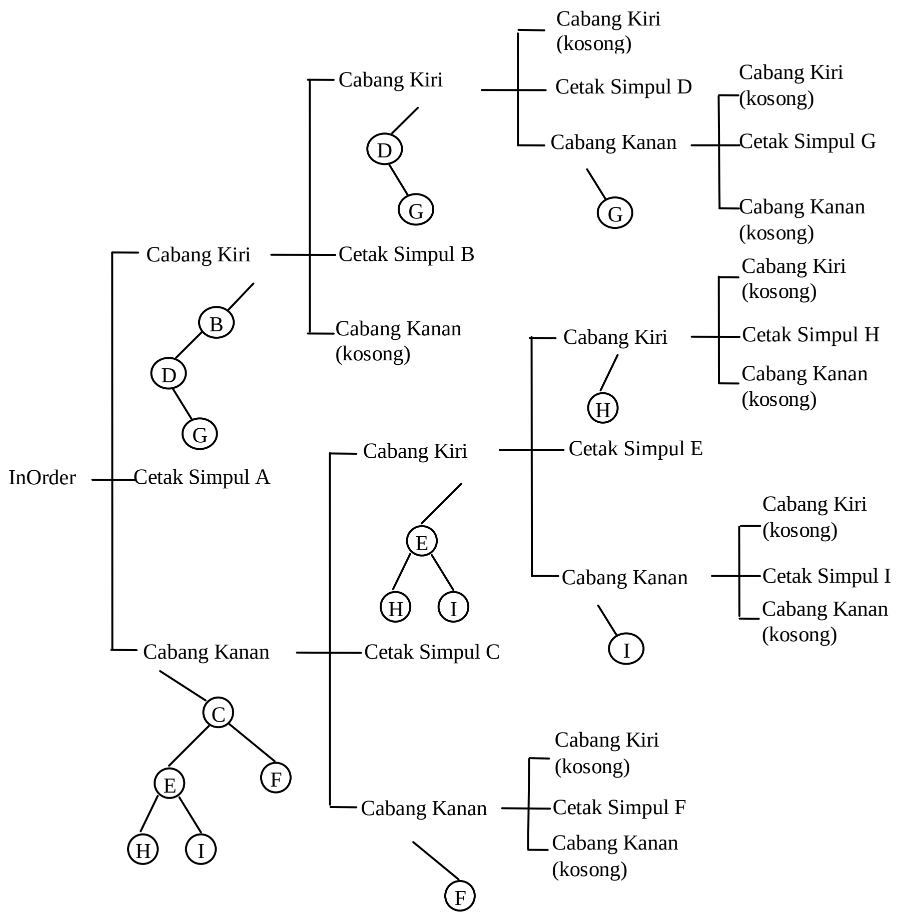
Gambar 12.5 Kunjungan PreOrder dari pohon biner pada Gambar 12.4

12.4.2 Kunjungan Inorder

Kunjungan secara inorder, juga sering disebut dengan *symmetric order*, menggunakan urutan:

- Kunjungi cabang kiri
- Cetak isi simpul yang dikunjungi
- Kunjungi cabang kanan

Dari Gambar 12.6 nampak pelacakan kunjungan InOrder. Hasil dari pelacakan kunjungan secara InOrder tersebut akan didapatkan hasil ‘DGBAEHICF’.



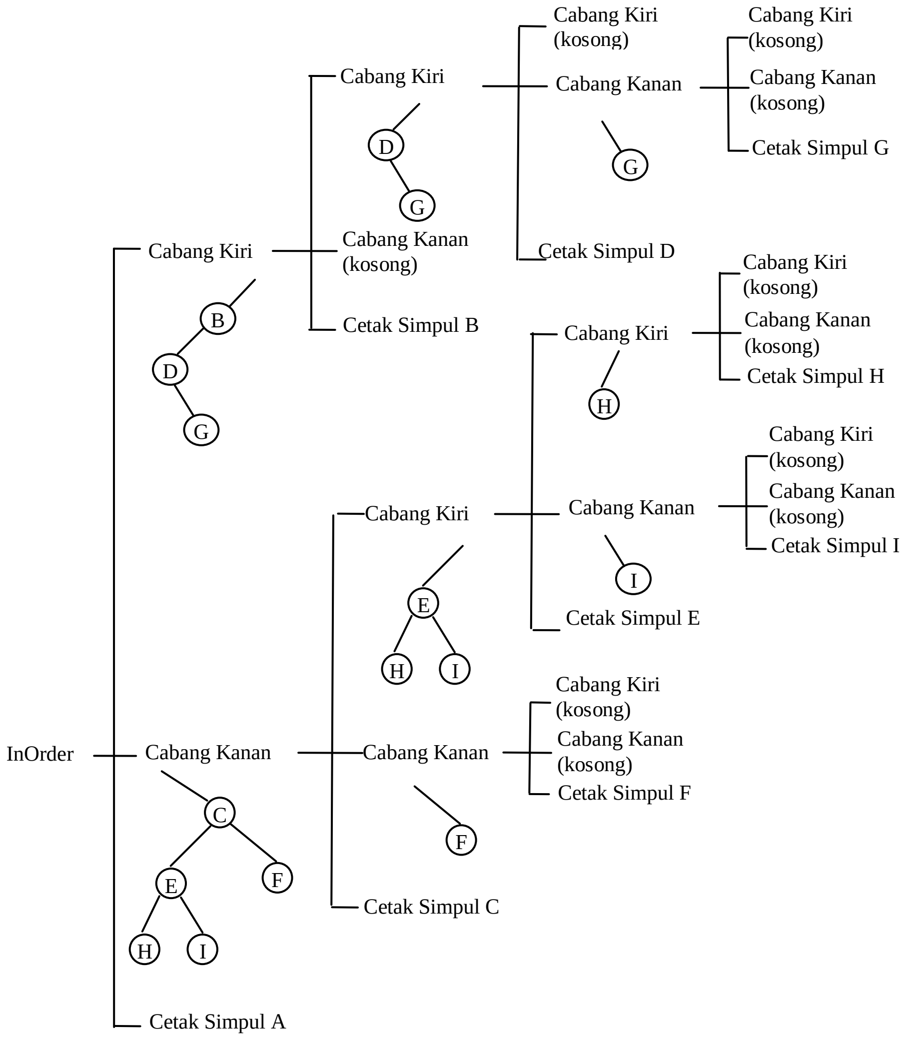
Gambar 12.6 Kunjungan InOrder dari pohon biner pada Gambar 12.4

12.4.3 Kunjungan Postorder

Kunjungan secara postorder menggunakan urutan:

- Kunjungi cabang kiri
- Kunjungi cabang kanan
- Cetak isi simpul yang dikunjungi

Dari gambar 12.7 nampak pelacakan kunjungan PostOrder. Hasil dari pelacakan kunjungan secara PostOrder tersebut akan didapatkan hasil ‘GDBHIEFCA’.



Gambar 12.7 Kunjungan PostOrder dari pohon biner pada Gambar 12.4

12.5 Ringkasan

1. Pohon adalah bentuk khusus dari graph yang mempunyai ciri-ciri:
   a. Graph tidak berarah
   b. Graph terhubung
   c. Graph tidak mengandung sirkuit
2. Pohon rentang adalah pohon yang direntangkan dari sebuah graph tidak berarah yang terhubung, tapi di dalamnya terdapat beberapa buah sirkuit.

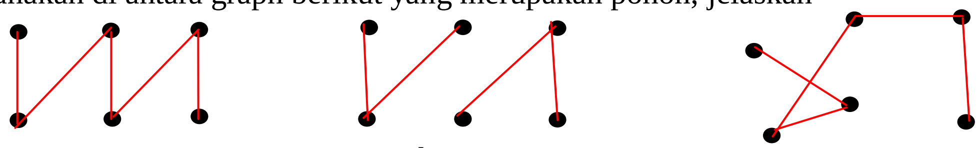
Pembentukan pohon adalah dengan menghapus semua sirkuit yang terdapat dalam graph tersebut.

3. Metode kunjungan dalam sebuah graph adalah dengan 3 cara:
   a. Preorder
   b. Inorder
   c. Postorder
4. hdh

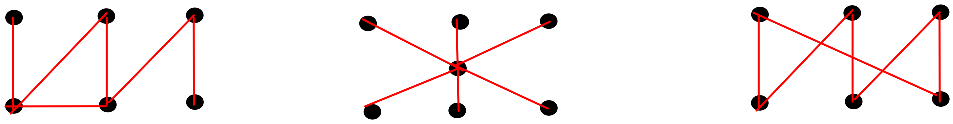
12.6 Latihan Soal

1. Sebuah pohon mempunyai 2n buah simpul berderajat 1, 3n buah simpul berderajat 2, dan n buah simpul berderajat 3. Tentukan banyaknya simpul dan garis dalam pohon tersebut.
2. Tunjukkan bahwa derajat semua simpul di dalam pohon dengan n simpul adalah 2n-2.
3. Misalkan T sebuah pohon dengan 50 buah garis. Pembuangan suatu garis tertentu dari T menghasilkan dua pohon T_1 dan T_2 yang terpisah satu sama lain. Jika banyaknya simpul di dalam T_1 sama banyak dengan banyaknya simpul di dalam T_2, tentukan jumlah simpul dan sisi di dalam T_1 dan T_2.
4. Selesaikan soal graph di bawah ini:

a. Manakah di antara graph berikut yang merupakan pohon, jelaskan

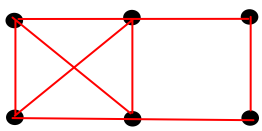


a b c

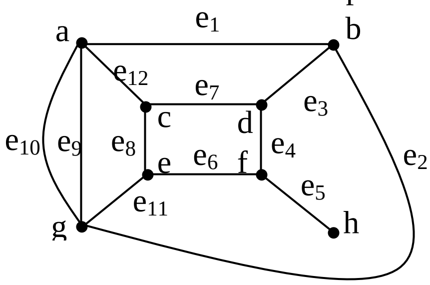


d e f

b. Buat spanning tree dari graph di bawah ini:



3. Gambarkan semua pohon rentang dari graph lengkap dengan 4 buah simpul.
4. Gambarkan minimal 2 pohon rentang (Spanning Tree) dari graph di bawah ini!



5. Gambarkan sebuah pohon biner dengan tujuh simpul dan hanya satu buah daun.
6. Gambarkan sebuah pohon biner dengan tujuh simpul

DAFTAR PUSTAKA

Jong Jek Siang, 2004, *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*, ANDI Offset, Yogyakarta.

Richard Johsonbaugh, 2001, *Discrete Mathematics*, Fifth Edition, Prentice Hall, New Jersey.

Rinaldi Munir, 2001, *Matematika Diskrit*, Informatika, Bandung.

Seyymour Lipschutz, 1997, *Schaum's Outlines Discrete Mathematics*, Second Edition,Mc-Graw Hill.