Bab 5. Strategi Pembuktian

Entin Martiana - Yuliana Setiowati
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
2007

Latar Belakang

- Hampir semua rumus yang berlaku dalam matematika selalu dapat dibuktikan berdasarkan definisi-definisi maupun rumus-rumus lain yang sudah pernah dibuktikan kebenarannya.
- Banyak rumus-rumus sederhana yang sering kita gunakan tanpa memikirkan pembuktiannya.

Tujuan

- Memperkenalkan bagaimana cara membuktikannya, sekaligus diberikan contoh-contohnya.
- Memperkenalkan dan membiasakan diri dengan metode-metode pembuktian yang ada, sehingga dapat membuktikan sendiri teorema-teorema yang lain.

Predikat & Kuantifier

- Pernyataan “x > 3” punya 2 bagian, yakni “x” sebagai subjek dan “ adalah lebih besar 3” sebagai predikat P.
- Kita dpt simbolkan pernyataan “x > 3” dengan P(x). Sehingga kita dapat mengevaluasi nilai kebenaran dari P(4) dan P(1).
- “P(x) benar untuk semua nilai x dalam domain pembicaraan” ditulis $\forall x\ P(x)$.

Predikat & Kuantifier

- Untuk menunjukkan $\forall x\ P(x)$ salah cukup dengan hanya menunjukkan/mencari satu nilai x dalam domain shg $P(x)$ salah. Nilai x tersebut selanjutnya dikatakan *counter-example* dari pernyataan $\forall x\ P(x)$.
- "Ada nilai x dalam domain pembicaraan sehingga $P(x)$ bernilai benar" ditulis $\exists x\ P(x)$.

Negasi

- "Setiap mhs dalam kelas ini telah mengambil Kalkulus I" $[\forall x\ P(x)]$.
- Negasi dari pernyataan ini adalah : "Ada seorang mhs dalam kelas ini belum mengambil Kalkulus I" $[\ \exists x\ P(x)]$.
- Sehingga $\sim \forall x\ P(x) \equiv \exists x\ P(x)$.

Pembuktian Langsung

Implikasi p → q dapat dibuktikan dengan menunjukkan jika p benar maka q juga harus benar. Cara untuk melakukan pembuktian langsung adalah sbb:

- Pembuktian dapat dilakukan untuk rumusan $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$, dimana D adalah himpunan asal
- Pilih salah satu contoh, yang dipilih secara acak yang merupakan anggota D, misalkan dinamakan a
- Tunjukkan bahwa pernyataan $P(a) \rightarrow Q(a)$ adalah benar, dengan asumsi $P(a)$ adalah benar
- Tunjukkan bahwa $Q(a)$ benar
- Dengan aturan Generalisasi Universal (UG), $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ adalah benar

Contoh Pembuktian Langsung

Buktikan bahwa untuk semua bilangan genap n antara 4 sampai 30, n dapat dinyatakan sebagai jumlah dari 2 bilangan prima.

- D = {4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30}
- Pilih salah satu, misalkan 20
- 20 dapat dinyatakan sebagai jumlah dari 2 bilangan prima
- 20 = 3 + 17
- Dengan aturan Generalisasi Universal (UG), untuk semua bilangan genap n antara 4 sampai 30, n dapat dinyatakan sebagai jumlah dari 2 bilangan prima adalah benar

Pembuktian Kontrapositif

Karena p → q ekivalen dengan ~q → ~p maka p → q dapat dibuktikan dengan menunjukkan bhw ~q → ~p benar. Cara melakukan pembuktian tak langsung kontrapositif adalah sbb:

- Implikasi p → q ekivalen dengan implikasi ~q → ~p
- Sehingga p → q dapat dikatakan benar, dengan menunjukkan ~q → ~p adalah benar
- Untuk menunjukkan ~q → ~p benar, asumsikan negasi dari q adalah benar dan buktikan bahwa negasi dari p adalah benar.

Contoh Pembuktian Kontrapositif

Buktikan bahwa untuk bilangan-bilangan bulat m dan n : Jika $m+n \geq 73$, maka $m \geq 37$ atau $n \geq 37$.

- Jika p adalah pernyataan $m+n \geq 73$,
  q adalah pernyataan $m \geq 37$,
  r adalah pernyataan $n \geq 37$
  maka dalam simbol kalimat di atas dapat dinyatakan sebagai
  $p \rightarrow (q \vee r)$
- Kontrapositifnya adalah $\sim(q \vee r) \rightarrow \sim p$ atau $(\sim q \wedge \sim r) \rightarrow \sim p$, dengan demikian dibuktikan kebenaran pernyataan : Jika $m < 37$ dan $n < 37$ maka $m+n < 73$.
- Untuk $m < 37$ berarti $m \leq 36$ dan $n < 37$ berarti $n \leq 36$, sehingga
  $m + n \leq 36 + 36$
  $m + n \leq 72$
  $m + n < 73$
- Terbukti bahwa jika $m < 37$ dan $n < 37$ maka $m+n < 73$.
- Dengan terbuktinya kontrapositif, maka terbukti pula kebenaran pernyataan awal, yaitu: Jika $m+n \geq 73$, maka $m \geq 37$ atay $n \geq 37$.

Pembuktian dengan Kontradiksi

Cara pembuktian dengan Kontradiksi adalah dengan mengasumsikan konklusi salah dan kemudian masukkan dalam sebuah kontradiksi. Sebagai contoh : Buktikan bahwa jumlah bilangan prima adalah tak hingga.

– Asumsikan terdapat beberapa bilangan prima yang terhingga, kemudian kita buat list-nya p1,p2,…,pn.
– Jika kita ambil bilangan q = pn+1. q seharusnya tidak termasuk dalam deret bilangan prima.
– Jika q merupakan bilangan prima, maka hal ini merupakan kontradiksi.
– Jika pembuktian di atas terbukti kontradiksi, maka bilangan prima mempunyai deret yang jumlahnya tak hingga.

Pembuktian dengan Counterexample

Untuk menunjukkan $\forall x\ P(x)$ salah cukup dengan hanya menunjukkan/mencari satu nilai x dalam domain shg P(x) salah. Nilai x tersebut selanjutnya dikatakan *counter-example* dari pernyataan $\forall x\ P(x)$.

- Jika sebuah argumen mempunyai rumus $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$, dimana himpunan asal dari x adalah D
- Untuk menunjukkan bahwa implikasi di atas salah untuk himpunan asal D, maka harus ditunjukkan x dalam D dimana $(P(x) \rightarrow Q(x))$ adalah salah
- Artinya jika terdapat x dalam D dimana P(x) benar tetapi Q(x)salah. Maka x dinamakan **counterexample** untuk implikasi di atas
- Dengan menunjukkan implikasi $(P(x) \rightarrow Q(x))$ adalah salah dengan mengambil x dalam D sehingga membuktikan bahwa $P(x) \rightarrow Q(x)$ adalah salah dinamakan **disproof** dari pemberian statemen dengan counterexample

Contoh Pembuktian Counter-example

Counter-examples. Tunjukkan bhw “setiap bilangan bulat positif adalah hasil tambah dari tiga bilangan kuadrat” adalah salah.

Solusi. Pernyataan ini benar untuk beberapa nilai, mis. $1=0^2+0^2+1^2$; $2=0^2+1^2+1^2$; $3=1^2+1^2+1^2$; $4=0^2+0^2+2^2$; $5=0^2+1^2+2^2$; $6=1^2+1^2+2^2$. Tapi kita tidak dapat mengekspresikan seperti di atas untuk bilangan 7. Jadi bilangan 7 merupakan counter-example dari pernyataan di atas.

Latihan Soal

1. Kapan pernyataan berikut bernilai benar:
   "Jika hari tidak hujan maka saya pergi ke rumahmu."
2. Tentukan nilai kebenaran $\forall x\ (x2 \geq x)$ jika:
   - x bilangan real
   - x bilangan bulat.
3. Tentukan nilai kebenaran dari $\exists x\ P(x)$ bila $P(x)$ menyatakan "$x2 > 12$" dan domain pembicaraan meliputi semua bilangan bulat positif tidak lebih dari 4.

Latihan Soal

4. Carilah negasi dari pernyataan berikut:
   - "Ada politikus yang jujur" dan
   - "Semua orang Indonesia makan nasi Rawon"
5. Tentukan negasi dari $\forall x(x2 > x)$ dan $\exists x\ (x2 = 2)$.
6. Berikan bukti langsung dari "Jika n bilangan bulat ganjil maka n2 ganjil."

Latihan Soal

7. Berikan bukti tak langsung dari “Jika n bulat dan n3+5 ganjil maka n genap.
8. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan-bilangan bulat m dan n, jika m.n = 1 maka m=1 dan n=1.
9. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat a, jika (a-2) habis dibagi 3, maka (a2 – 1) habis dibagi 3 juga.
10. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat a, jika (a-1) mod 3 = 0 atau (a-2) mod 3 = 0, maka (a2 – 1) mod 3 = 0.

Latihan Soal

11. Dengan pembuktian secara kontradiksi, tunjukkan bahwa sedikitnya ada 4 hari yang sama dari 22 hari sebarang yg dipilih.
12. Dengan pembuktian secara kontradiksi, tunjukkan bahwa jika 3n+2 ganjil maka n ganjil.
13. Dengan menggunakan Pembuktian Counterexample, tunjukkan bhw “setiap bilangan bulat positif adalah hasil tambah dari tiga bilangan kuadrat” adalah salah.