Bab 8. Teori Counting Lanjut

Entin Martiana - Yuliana Setiowati
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
2007

Permutasi

- Sebuah himpunan yang terdiri dari n obyek mempunyai susunan dengan urutan berbeda. Hal ini dinamakan permutasi dari obyek tersebut. Dengan kata lain permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan obyek-obyek.
- Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi aturan perkalian. Misalkan jumlah obyek adlah n, maka urutan pertama dipilih dari n obyek, urutan kedua dipilih dari n – 1 obyek, urutan ketiga dipilih dari n – 2 obyek begitu seterusnya dan urutan terakhir dipilih dari 1 obyek yang tersisa. Menurut kaidah perkalian, permutasi dari n obyek adalah:

$$n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (2)(1) = n!$$

Contoh

- Misalkan ada tiga buah bola yang berbeda warnanya, yaitu merah (m), biru (b), dan putih (p). Kita akan memasukkan ketiga buah bola itu ke dalam tiga buah kotak, masing-masing kotak 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak?

  Penyelesaian:

  Misalkan urutan itu kita simbolkan xyz. Urutan pertama (x) mungkin ditempati oleh salah satu dari 3 buah bola, urutan kedua (y) mungkin ditempati oleh salah satu dari 2 buah bola (karena 1 bola lagi sudah dipakai untuk X), dan urutan ketiga (z) ditempati oleh 1 buah bola yang tersisa, sehingga jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah $(3)(2)(1) = 3! = 6$.

Contoh

- Sekarang misalkan ada enam buah bola yang berbeda warnanya, yaitu merah(m), biru (b), putih (p), hijau (h), kuning (k) dan jingga (j). Kita akan memasukkan keenam buah bola itu ke dalam tiga buah kotak masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

  Perhitungannya adalah sebagai berikut:

  Kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (ada 6 pilihan).

  Kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan).

  Kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan).

  Menurut kaidah perkalian, jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = (6)(5)(4) = 120 buah.

Permutasi

- Permutasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan urutan r buah elemen yang dipilih dari n buah elemen, dengan $r <= n$, yang dalam hal ini pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.Jumlah susunan berbeda dari pemilihan r obyek yang diambil dari n obyek disebut permutasi-r, dilambangkan dengan P(n,r), yaitu

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)...(n-(r-1)) = n!/(n-r)!$$

- Perhatikan bahwa bila $r = n$, maka persamaan di atas menjadi sama dengan :

$$P(n,n)=n!/(n-n)! = n!/0! = n!/1 = n!$$

Kombinasi

- Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi urutan kemunculan diabaikan. Urutan acb, bca, dan acb dianggap sama dan dihitung sekali.
- Kombinasi r elemen dari n elemen adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen
  - $C(n,r) = P(n,r)/P(r,r) = (n!/(n-r)!)/r!(r-r)! = n!/r!(n-r)!$

Kombinasi

- Persoalan kombinasi dapat dipandang sebagai cara memilih r buah elemen dari n buah elemen yang ada, tetapi urutan elemen di dalam susunan hasil pemilihan tidak penting.
  - Sebagai contoh, misalkan sebuah klub memiliki 25 orang anggota. Kita akan memilih lima orang sebagai panitia. Panitia adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama. Misalkan jika adal lima orang yang dipilih A,B,C,D,E maka urutan penempatan masing-masing di dalam panitia tidak penting. (ABCDE sama dengan BACED, ADCEB dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah C(25,5) = 53130 cara.

Relasi *Recurrence* (Relasi yang Berulang)

- Banyak problem counting yang tidak dapat dipecahkan dengan menggunakan hanya aturan dasar, kombinasi, permutasi, dan aturan sarang merpati.

  Misalnya:

  Ada berapa banyak string biner dengan panjang n yang tidak memuat 2 angka nol berurutan?

Relasi *Recurrence* (Relasi yang Berulang)

- Perhatikan perintah di bawah ini untuk membangkitkan sebuah deret:
  1. Dimulai dengan 5.
  2. Diberikan hubungan dengan menambahkan 3 dengan bilangan sebelumnya untuk bilangan berikutnya.
- Jika kita mendaftar isi dari deret tersebut adalah:

5, 8, 11, 14, 17, ...

Relasi *Recurrence* (Relasi yang Berulang)

- Jika kita menunjukkan deret pada 8.4 sebagai a1, a2, ... kita dapat mengatakan dengan cara lain untuk perintah pertama adalah:

$$a1 = 5 \qquad \text{(Rumus a)}$$

- dan kita dapat mengatakan dengan cara lain untuk perintah kedua adalah:

$$an = an\text{-}1 + 3,\ n \geq 2 \qquad \text{(Rumus b)}$$

Relasi *Recurrence* (Relasi yang Berulang)

- Menggunakan rumus a dan b kita dapat menghitung bilangan dalam deret tersebut dengan mengacu pada perintah 1 dan 2. Dan kita juga dapat melihat bahwa rumus a dan b sama dengan perintah 1 dan 2.
- Rumus b merupakan sebuah contoh dari relasi recurrence (relasi yang berulang). Sebuah relasi recurrence mendefinisikan sebuah deret dengan nilai ke-n didefinisikan dari nilai sebelumnya. Untuk keperluan relasi recurrence seperti rumus b maka sebuah nilai awal seperti rumus a harus diberikan. Nilai awal ini dinamakan *initial conditions* (kondisi pendahulu).

Relasi *Recurrence* (Relasi yang Berulang)

- Relasi *Recurrence* untuk deret a_0, a_1, ... adalah rumus yang menghubungkan antara a_n dengan bilangan sebelumnya a_0, a_1, ... , a_{n-1}. Kondisi pendahulu untuk deret a_0, a_1 ... secara jelas harus diberikan untuk batas dari deret bilangan.

Contoh

- $\{a_n\}$ barisan yang memenuhi

  $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ untuk $n = 2,3, 4, \ldots.$

  dan misalkan pula $a_0 = 2$ dan $a_1 = 9$.

  Tentukan a_2 dan a_4!

  Solusi :

  $a_2 = a_1 - a_0 = 9 - 2 = 7$.

  Sedangkan utk mencari a_4 dicari lebih dahulu a_3.

  $a_3 = a_2 - a_1 = 7 - 9 = -2$.

  Jadi, $a_4 = a_3 - a_2 = -2 - 7 = -9$.

Contoh

- Sepasang kelinci ditaruh di suatu pulau. Pasangan kelinci ini tidak akan beranak sampai berumur 2 bulan. Setelah berumur 2 bulan, setiap sepasang menghasilkan sepasang yg lain setiap bulannya. Tentukan relasi *recurrence* dari jumlah pasangan setelah n bulan, bila tidak ada kelinci yg mati.

Contoh

Solusi :

Misalkan f_n: jumlah pasangan kelinci setelah n bulan.

Maka, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$.

Untuk mencari fn, tambahkan jumlah pasangan pada bulan sebelumnya, f_{n-1}, dengan jumlah pasangan yang baru lahir, f_{n-2}.

Jadi, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Contoh

Ada berapa banyak string biner dengan panjang n yang tidak memuat 2 angka nol berurutan?

Solusi :

Misalkan a_n: banyaknya string biner panjang n yang tidak memuat 2 angka nol berturutan.

Yg berakhiran 1:	String biner panjang n-1 tanpa 2 angka nol berurutan	1	a_{n-1}
Yg berakhiran 0:	String biner panjang n-2 tanpa 2 angka nol berurutan	1 0	a_{n-2}

Total: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Contoh

- Jadi, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$, dengan $a_1 = 2$ dan $a_2 = 3$.
- Barisan $\{a_n\}$ memenuhi relasi *recurrence* yang sama dengan bilangan Fibonacci.

Menyelesaikan Relasi Recurrence

- Untuk beberapa permasalahan kita harus menyelesaikan relasi recurrence hingga menjadi satu rumus yang jelas.

Contoh:

$$M(n) = \begin{cases} 0 & \text{jika } n = 0 \\ M(n-1)+1 & \text{jika } n > 0 \end{cases}$$

Menyelesaikan Relasi Recurrence

- Maka kita selesaikan relasi recurrence di atas hingga didapatkan persamaan eksplisitnya sbb:

$$
\begin{aligned}
M(n) &= M(n-1) + 1 \\
&= M(n-2) + 1 + 1 = M(n-2) + 2 \\
&= M(n-3) + 1 + 2 = M(n-3) + 3 \\
& M(n-i) + i \\
&= M(n-n) + n \\
&= M(0) + n = 0 + n = n
\end{aligned}
$$

Menyelesaikan Relasi Recurrence

Contoh lain:

$$A(n) = \begin{cases} 0 & \text{jika } n = 1 \\ A(\lfloor n/2 \rfloor)+1 & \text{jika } n > 1 \end{cases}$$

Menyelesaikan Relasi Recurrence

- Maka kita selesaikan relasi recurrence di atas hingga didapatkan persamaan eksplisitnya sbb:

$$
\begin{aligned}
A(n) &= A(2k) \\
&= A(2k-1) + 1 \\
&= A(2k-2) + 1 + 1 = A(2k-2) + 2 \\
& \quad A(2k-i) + i \\
&= A(2k-k) + k \\
&= A(20) + k = A(1) + k = 0 + k = k \\
& n = 2k \rightarrow k = {}^{2}\log n \\
A(n) &= {}^{2}\log n
\end{aligned}
$$

Latihan Soal

1. Berapa jumlah himpunan bagian dari himpunan B = {1, 2, ..., 10} yang mempunyai anggota paling sedikit enam?
2. Seseorang mempunyai 10 kawan. Dalam berapa banyak cara dia dapat pergi makan ke restoran dengan dua atau lebih kawannya?
3. Sebuah pesan kawat dibentuk dari rangkaian lima garis putus-putus (dash) dan tiga buah titik (dot). Berapa banyak pesan dapat dibentuk?
4. Lima belas pemain basket akan direkrut oleh tiga tim profesional di Bandung, Jakarta, dan Surabaya, sedemikian sehingga setiap tim akan merekrut lima pemain. Dalam berapa banyak cara ini dapat dilakukan?

Latihan Soal

5. Berapa banyak cara 2n orang dapat dibagi menjadi n pasangan?
6. Dalam berapa cara kita dapat memilih pimpinan, wakil pimpinan, sekretaris, bendahara dari sebuah organisasi yang mempunyai calon untuk ke-4 jabatan tsb. sebanyak 10 orang.
7. Berapa banyak cara menyusun menu nasi goreng tiga kali seminggu untuk sarapan pagi?
8. Ada berapa cara kita dapat memilih 3 dari 4 elemen himpunan A = {a,b,c,d}?

Latihan Soal

9. Ada berapa deret biner yang terdiri dari 8 bit yang berisi 4 buah angka 1?
10. Setiap pengguna suatu sistem komputer memiliki sebuah *password*, yang terdiri dari 6 sampai 8 karakter, dengan setiap karakter adalah huruf kapital atau digit bilangan desimal. Ada berapa banyak *password* yang mungkin?
11. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat n terdapat kelipatan dari n yang hanya terdiri dari digit 0 atau 1 saja.

Latihan Soal

14. Jika seseorang sedang berinvestasi 2 juta rupiah dan mendapat keuntungan tetap setiap tahunnya sebanyak 14%. Jika An adalah jumlah uangnya setelah n tahun, jawab pertanyaan di bawah ini:
    - Tentukan relasi recurrence untuk A_0, A_1, ...
    - Tentukan initial condition untuk A_0
    - Tentukan A_1, A_2, A_3
    - Tentukan rumus explisit untuk A_n
    - Setelah berapa tahun investasinya akan berubah minimal menjadi 2 kali lipat.

Latihan Soal

15. Selesaikan relasi recurrence di bawah ini sehingga didapatkan rumus eksplisitnya:
    - $C_n = 2\ C_{n-1} + 1$ jika $C_0 = 1$
    - $a_n = 2n\ a_{n-1}$ jika $a_0 = 1$
    - $S_n = S_{n-1} + n - 1$ jika $S_1 = 0$
    - $S_n = S_{n-1} + 2$ jika $S_0 = 0$
    - $a_n = a_{n-1} + 1 + 2_{n-1}$ jika $a_0 = 0$
    - $a_n = a_{n-1} + 4$ jika $a_0 = 0$
    - $a_n = 6\ a_{n-1} + 9\ a_{n-2}$ jika $a_0 = a_1 = 1$